CLASSES DE FAISCEAUX ET THEOREME DE RIEMANN-ROCH

par A. GROTHENDIECK (*)

CHAP.I - λ-Anneaux (préliminaires formels)

CHAP.II - Classes de faisceaux algébriques cohérents et classes de Chern

Démonstration du théorème de Riemann-Roch (1er Novembre 1957).

(*) Ceci est la reproduction textuelle du rapport cité dans l'Introduction du présent Séminaire. Les notes de bas de page indiquées par des signes (*), (**) ont été rajoutées en Octobre 1967.

CHAPITRE I

λ-Anneaux (Préliminaires formels)

§ 1. Définitions

On appelle λ-anneau (*) un anneau commutatif K avec unité, muni d'une famille d'applications

(1.1) $$\lambda^i : K \longrightarrow K$$

(i entier ≥ 0) satisfaisant aux conditions suivantes :

(1.2) $$\lambda^o x = 1, \lambda^1 x = x, \lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i x . \lambda^{n-i} y \quad .$$

Posons, pour tout $x \in K$

(1.3) $$\lambda_t(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n(x)t^n \in K[[t]] \quad ;$$

les relations précédentes expriment alors que $x \longmapsto \lambda_t(x)$ est un homomorphisme du groupe additif K dans le groupe multiplicatif $1 + K[[t]]^+$ des séries formelles dans K, d'augmentation 1, relevant l'homomorphisme canonique $1 + \sum_{i>0} x_i t^i \longrightarrow x_1$.

Ainsi, sur l'anneau $\mathbb{Z}$ existe une unique λ-structure compatible avec sa structure d'anneau et telle que

---

(*) Dans ce séminaire, nous disons plutôt pré-λ-anneau (V 2.1), réservant le nom de λ-anneau à ceux satisfaisant la condition supplémentaire de la page 3 (cf V 2.4).

(1.4) $$\lambda_t(1) = 1 + t \quad .$$

On a alors

(1.5) $$\lambda_t(n) = (1 + t)^n \quad ,$$

d'où $\lambda^i(n) = \binom{n}{i}$.

La notion de λ-homomorphisme de λ-anneaux est claire ; un λ-anneau augmenté est un λ-anneau muni d'un λ-homomorphisme dans $\mathbb{Z}$.

Pour définir la notion de λ-anneau spécial, les considérations suivantes sont utiles. Soit k un anneau commutatif avec unité, soit $K = 1 + k[[t]]^+$ le groupe des séries formelles à coefficients dans k, d'augmentation 1; on va y introduire une loi de λ-anneau dont la structure additive soit la multiplication des séries formelles. La multiplication de cet anneau sera notée $f \circ g$. Elle est entièrement déterminée par la condition que les coefficients $c_n = c_n(f \circ g)$ de $f \circ g$ soient donnés par des polynômes universels à coefficients entiers en les coefficients $a_i = c_i(f)$ et $b_i = c_i(g)$ de f et g respectivement :

(1.6) $$c_n = P_n(a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n) \quad ,$$

qu'elle soit distributive par rapport à l' "addition" fg, et soit donnée pour des facteurs linéaires par :

(1.7) $$(1 + at) \circ (1 + bt) = 1 + abt \quad .$$

Les P_n se calculent par des calculs de fonctions symétriques ; P_n est isobare de poids n en les a_i et isobare de poids n en les b_i (a_i et b_i étant de poids i) et d'ailleurs symétrique en $a = (a_i)$ et $b = (b_i)$. De même, les $\lambda^i(f)$ sont déterminés sans ambiguïté par la condition que les coefficients $c_n(\lambda^i(f)) = c_n$ de $\lambda^i(f)$ se calculent au moyen de polynômes <u>universels</u> à coefficients entiers en les coefficients $c_n(f) = a_n$ de f;

(1.8) $$c_n = P_{i,n}(a_1,\ldots,a_{in}) \quad ,$$

que les relations (1.2) soient vérifiées, et que, pour $i > 1$, on ait :

(1.9) $$\lambda^i(1 + at) = 1$$

(1 est l'élément nul de l'anneau $K = 1 + k[[t]]^+$). Les $P_{i,n}$ se calculent encore par des calculs de fonctions symétriques, et l'on constate que $P_{i,n}$ est un polynôme isobare de poids in en les a_i. Muni des opérations précédentes, K devient un λ-anneau, son élément nul est 1, son élément unité est $1 + t$. Notons aussi la relation :

(1.7 bis) $$(1 + at) \circ f = f(at)$$

Soit maintenant K un λ-anneau quelconque. On dit que K est <u>spécial</u> si l'homomorphimse additif λ_t de K dans $1 + K[[t]]^+$ est un λ-homomorphisme. Cela signifie donc qu'on a les formules :

(1.10) $$\lambda_t(1) = 1 + t, \quad \lambda_t(xy) = \lambda_t(x) \circ \lambda_t(y), \quad \lambda_t(\lambda^i(x)) = \lambda^i(\lambda_t(x) \quad ,$$

ou encore, explicitement :

(1.11) $$\begin{cases} \lambda^i(1) = 0 & \text{si } i \geqslant 1 \\ \lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1 x,\ldots,\lambda^n x;\lambda^1 y,\ldots,\lambda^n y) & \\ \lambda^n(\lambda^i(x)) = P_{i,n}(\lambda^1 x,\ldots,\lambda^n x) & , \end{cases}$$

où les P_n et les $P_{i,n}$ sont les polynômes universels envisagés plus haut. Il en résulte en particulier les formules (1.5). (On peut montrer que le λ-anneau $1 + k[[t]]^+$ construit avec un anneau commutatif k est spécial ; mais nous n'aurons pas besoin de ce fait).

§ 2. Exemples

1) Soient G un groupe et k un anneau commutatif ; on considère le groupe $\underline{K}(G)$, quotient du groupe libre engendré par les classes de représentations de G dans des k-modules de type fini par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(\rho \oplus \rho') - (\rho) - (\rho')$ (on note $\oplus$ la somme directe). Le produit tensoriel et les puissances extérieures définissent dans $\underline{K}(G)$ une structure de λ-anneau. On peut aussi passer au quotient par les éléments de la forme $(\rho) - (\rho') - (\rho'')$ où ρ est une présentation extension de ρ' par ρ'', triviale comme extension de k-modules. On obtient le groupe $\underline{K}_r(G)$ des classes réduites de représentations de G, et l'on constate que la loi de λ-anneau passe au quotient.

Lorsque k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 (*), on peut montrer que $\underline{K}(G)$, et a fortiori $\underline{K}_r(G)$, est un λ-anneau spécial ; il n'en est plus de même si la caractéristique est $\neq 0$, mais cependant si k est algébriquement clos (*), $\underline{K}_r(G)$ est encore un λ-anneau spécial. Pour le prouver, on est ramené au cas où G est un produit $Gl(m,k) \times Gl(n,k)$ et où l'on ne considère que les représentations rationnelles de G ; notre assertion résulte de la détermination explicite de $\underline{K}_r(G)$ qui sera faite plus bas (exemple 3) ; enfin, lorsque k est de caractéristique 0, la complète réductibilité des représentations rationnelles de G montre que $\underline{K}(G) = \underline{K}_r(G)$.

(*) Il est inutile que k soit algébriquement clos, cf.(VI 3.3) pour un résultat encore plus général (englobant tous ceux qui seront utilisés dans le présent rapport).

Variantes de l'exemple précédent : G est un groupe algébrique défini sur k et l'on ne considère que les représentations rationnelles de G définies sur k ; on peut considérer le cas d'un groupe topologique, ou de Lie, et des représentations continues, etc ... ([1])

2) Soit X une variété algébrique, irréductible ou non, définie sur le corps k. On pourra considérer le groupe quotient du groupe libre engendré par les classes de fibrés vectoriels sur X (définis sur k), par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(E \oplus E') - (E) - (E')$, sur lequel les opérations de λ-anneau seront définies par le produit tensoriel et les puissances extérieures. Si X est complète, c'est un groupe libre engendré par les fibrés vectoriels indécomposables sur X (grâce à Krull-Remak-Schmidt) ; la connaissance de cet anneau et de sa base équivaut à la classification complète des fibrés vectoriels sur X et la connaissance des opérations tensorielles élémentaires sur ces fibrés. Si k est algébriquement clos de caractéristique 0, toutes les autres opérations tensorielles sur des classes de fibrés sont alors connues, à l'aide de ce qui va suivre dans 3). On peut faire un passage au quotient plus draconien, par le groupe engendré par les éléments $(E) - (E') - (E'')$ où E est un fibré vectoriel extension de E' par E" ; on trouve alors un λ-anneau, noté $\underline{K}(\xi(X))$, où $\xi(X)$ désigne la catégorie additive des fibrés vectoriels sur X, définis sur k. En utilisant les résultats de l'exemple 1), on montre que si k est algébriquement clos (*), le λ-anneau $\underline{K}(\xi(X))$ est spécial, et qu'il en est de même du

---

([1]) On peut construire d'autres exemples de λ-anneaux, par exemple l'ensemble des classes d'équivalence de formes quadratiques, l'ensemble des classes de représentations d'une algèbre de Lie, etc... Nous promettons que nous n'aurons pas besoin de tous ces exemples pour traiter le théorème de Riemann-Roch !

(*) Condition inutile, cf. note de bas de page précédente.

premier λ-anneau défini ici, si la caractéristique de k est 0, mais non dans le cas général.

3) Détermination de $\underline{K}(G)$ et de $\underline{K}_r(G)$ dans certains cas importants : On suppose le corps k algébriquement clos, le groupe G algébrique affine connexe et "globalement réductif" (le radical de G est isomorphe à k^{*s}) et l'on ne considère que les représentations linéaires rationnelles. En caractéristique 0, la complète réductibilité des représentations linéaires rationnelles de G montre que $\underline{K}(G) = \underline{K}_r(G)$ est le groupe libre engendré par les classes des réprésentations rationnelles irréductibles. Or, si T est un tore maximal de G, on a $\underline{K}(T) = \underline{K}_r(T) = \mathbb{Z}(\hat{T})$, algèbre du groupe $\hat{T}$ des caractères rationnels de T ; on a $\hat{T} \simeq \mathbb{Z}^r$ si r est le rang de G (ceci est indépendant de la caractéristique). Le groupe de Weyl W opère dans T, donc dans $\underline{K}(T)$, d'une manière qui ne dépend que des opérations de W dans le groupe libre $\hat{T}$. On a un homomorphisme évident de λ-anneaux, déduit de l'injection de T dans G :

$$\underline{K}_r(G) \longrightarrow \underline{K}_r(T)^W = \underline{K}(T)^W, \tag{1.13}$$

où $\underline{K}(T)^W$ dénote l'ensemble des points fixes de W dans $\underline{K}(T)$. La théorie des représentations linéaires de G (*) démontre alors le théorème suivant :

Théorème 1.1. L'homomorphisme (1.13) est un isomorphisme.

On voit donc que $\underline{K}_r(G)$, une fois connu le "type" de G (caractérisé par W opérant sur un groupe $\mathbb{Z}^r$), ne dépend pas de la caractéristique, et que c'est un λ-anneau spécial. On a une base canonique de $\underline{K}_r(G)$ correspondant aux orbites de W dans $\hat{T}$; une autre base s'obtient ainsi :

(*) Cf. Séminaire Chevalley 1956/58 Groupes de Lie albébriques (Ecole Normale Supérieure).

soient $(\rho_i)_{1\leq i\leq r'}$ les classes de représentation de G correspondant aux représentations fondamentales de G/rad G, et $(\sigma_i)_{1\leq i\leq r''}$ une base du groupe des homomorphismes rationnels de G dans k^* ; on a donc $r' + r'' = r$ (rang de G).

Corollaire : L'anneau $\underline{K}_r(G)$ s'identifie au sous-anneau $\mathbb{Z}[\rho_1,\ldots,\rho_{r'};\ \sigma_1,\ldots,\sigma_{r''};\sigma_1^{-1},\ldots,\sigma_{r''}^{-1}]$ du corps des fonctions rationnelles en les ρ_i et les σ_j à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (*).

En particulier, $\underline{K}_r(G)$ n'a pas de diviseurs de 0 ; si $G = \prod_i Gl(n_i,k)$, l'anneau $\underline{K}_r(G)$ s'explicite ainsi : soit ρ_i la représentation de G déduite de la représentation identique de $Gl(n_i,k)$; si l'on considère alors le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbb{Q}$ en des indéterminées $\lambda^j(\rho_i)$ $(1\leq j\leq n_i)$, alors $\underline{K}_r(G)$ s'identifie au sous-anneau engendré par ces indéterminées et les inverses des $\lambda^{n_i}(\rho_i)$. Cela justifie notre assertion que, du moins en caractéristique 0, les opérations λ^i permettent de reconstituer toutes les opérations tensorielles sur les fibrés vectoriels ; ceci est encore vrai sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, pourvu qu'on prenne des classes réduites.

Remarques : a) Dans l'exemple 1), l'anneau $\underline{K}(G)$ est augmenté, l'augmentation étant définie par le degré des représentations, et par passage au quotient, cette augmentation définit une augmentation sur $\underline{K}_r(G)$. De même, les λ-anneaux envisagés dans l'exemple 2) sont augmentés lorsque X est k-irréductible ; dans $\underline{K}(\xi(X))$, l'augmentation est définie par le rang d'un fibré vectoriel, c'est-à-dire la dimension de ses fibres.

(*) Il faut supposer le groupe dévisé G' de G simplement connexe pour que cet énoncé soit correct.

b) Lorsque le corps k n'est pas algébriquement clos, il est plausible que $\underline{K}(G)$ est un λ-anneau spécial en caractéristique 0, et de même pour $\underline{K}_r(G)$ en toutes caractéristiques.

c) En caractéristique non nulle, le théorème 1.1 m'a été gracieusement fourni par Chevalley.

§ 3. Le λ-anneau défini par un anneau gradué

Soit A un anneau gradué commutatif avec unité ; on supposera pour simplifier que les degrés de A sont positifs et que $A^o = \mathbb{Z}$. On désigne par $\hat{A}$ le produit des A^i (c'est un anneau commutatif avec unité), par $\hat{A}^+$ le noyau de l'augmentation évidente $\hat{A} \longrightarrow A^o = \mathbb{Z}$. Alors $1 + \hat{A}^+$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\hat{A}$. Considérons le groupe abélien

$$(1.14) \qquad \tilde{A} = \mathbb{Z} \times (1 + \hat{A}^+) \quad ,$$

dont les éléments seront notés $[n,x]$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x = 1 + \sum_{i\geq 1} x_i^i \in 1+\hat{A}^+$ $(x^i \in A^i)$.
Nous écrirons ce groupe additivement, ainsi :

$$(1.15) \qquad [n,x] + [n',x'] = [n + n', xx'] \quad .$$

L'élément nul de ce groupe est $[0,1]$. Nous allons y introduire une structure de λ-anneau augmenté, compatible avec sa strucutre additive, l'augmentation étant $\varepsilon:[n,x] \longrightarrow n$. Le produit $[m,x][n,y]$ est complètement caractérisé par le fait qu'il s'écrive $[\, mn, x^n y^m(x * y)]$, où $x * y$ est un élément de $1 + \hat{A}^+$ dont les composantes s'expriment comme polynômes universels à coefficients entiers en les x^i et les y^i :

$$(1.16) \qquad (x * y)^i = Q_i(x^1,\ldots,x^i;y^1,\ldots,y^i) \qquad (i\geq 1)$$

le polynôme Q_i étant isobare de poids i. De plus, $x * y$ doit être distributif par rapport à l' "addition" xy et pour des facteurs "linéaires" doit se réduire à ce qui suit :

$$(1.17) \qquad [1,\ 1 + x^1][1,\ 1 + y^1] = [1,\ 1 + x^1 + y^1] \quad .$$

Les polynômes Q_i s'évaluent par des calculs de fonctions symétriques élémentaires (il s'agit du calcul des classes de Chern d'un produit tensoriel de fibrés vectoriels à l'aide des classes de Chern x^i et y^i des facteurs et de leurs dimensions respectives m et n). De (1.17) on déduit :

$$(1.17 \text{ bis}) \qquad (1 + x^1) * (1 + y^1) = (1 + x^1 + y^1)/(1 + x^1)(1 + y^1) \quad ,$$

et un produit $x * y$ quelconque se calcule terme à terme en décomposant "formellement" x en un produit $\prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i)$ et y en un produit $\prod_{i=1}^{n} (1 + \beta_i)$, où les α_i et les β_i sont de degré 1.

De cette manière, $\widetilde{A}$ devient un anneau commutatif augmenté, avec une unité $[1,1]$, et on peut l'interpréter comme l'anneau obtenu par adjonction d'une unité à l'anneau $1 + \hat{A}^+$. De plus, sur $\widetilde{A}$, on définit une <u>filtration</u> en posant $\widetilde{A}^o = \widetilde{A}$ et en notant $\widetilde{A}^n$ l'ensemble des $[0,x]$ avec $x^i = 0$ pour $1 \leq i < n$; cette filtration est compatible avec le produit, car on a

$$(1.18) \qquad (1 + \sum_{i \geq m} x^i) * (1 + \sum_{j \geq n} y^j) = 1 - \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} x^m y^n + \dots \; ,$$

les termes non écrits étant de degré > m + n. Cette formule montre que l'anneau gradué $G(\widetilde{A})$ associé à $\widetilde{A}$ s'identifie à A au point de vue additif, mais non au point de vue multiplicatif ; on peut dire seulement que l'application η' de A dans $G(\widetilde{A})$ définie par

$$(1.19) \qquad \eta'(x^i) = (-1)^{i-1}(i-1)!\, x^i \qquad (x^i \in A^i)$$

est un <u>homomorphisme d'anneaux</u>.

On introduit dans $\widetilde{A}$ des opérations λ^i vérifiant les axiomes des λ-anneaux (§ 1, formules (1.2)), bien déterminées par la condition que les composantes de $\lambda^i[0,x]$ se déduisent des composantes x^i de x par des polynômes <u>universels</u> à coefficients entiers

$$(1.20) \qquad \lambda^i[0,x] = [0,\lambda^i x] \quad (\lambda^i x)^{(n)} = Q_{i,n}(x^1,\dots,x^n)$$

($Q_{i,n}$ est isobare de poids n), et que l'on ait

$$(1.21) \qquad \lambda^i[1,\, 1 + x^1] = 0 \qquad \text{pour } i > 1 \quad .$$

Les polynômes $Q_{i,n}$ s'évaluent par un calcul de fonctions symétriques élémentaires, qui est le calcul des classes de Chern des puissances extérieures d'un fibré vectoriel, à l'aide des classes de Chern et du rang de ce dernier. On constate alors que $\widetilde{A}$ est un λ-anneau <u>spécial</u> augmenté et que les $\widetilde{A}^i$ sont stables par les opérations λ^j.

Le λ-anneau augmenté $\widetilde{A}$ peut être considéré comme un foncteur en A ; par suite l'automorphisme principal $x = \sum_{i\geq 0} x^i \longrightarrow \check{x} = \sum_{i\geq 0} (-1)^i x^i$ de A définit un automorphisme de $\widetilde{A}$, noté par le même symbole $\vee$.

<u>Proposition</u> 1.2. <u>Pour</u> $x \in \widetilde{A}$ <u>de la forme</u> $[n,\, 1 + x^1 + \dots + x^n]$ (on a donc $x^i = 0$ pour $i > n$), <u>on a</u> $\lambda^i(x) = 0$ <u>pour</u> $i > n$, <u>on a</u> $\lambda^n(x) = [1,\, 1 + x^1]$ <u>et enfin</u>

$$(1.22) \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(x) = [0,\, 1 - (n-1)!\, x^n + \dots\,]$$

De cette proposition et du fait que les $\widetilde{A}^i$ sont stables par les opérations λ^j, on déduit que la formule (1.22) est valable chaque fois que $\epsilon(x) = n$, que l'on ait ou non $x^i = 0$ pour $i > n$.

La formule (1.22) admet les généralisations suivantes : soit K un λ-anneau quelconque et par ailleurs arbitraire ; pour $x \in K$, on pose

$$(1.23) \qquad \gamma^n(x) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^i(x + n) = \lambda^n(x + n - 1)$$

(l'identité des deux derniers membres résulte d'une récurrence immédiate). On a en particulier $\gamma^o(x) = 1$ et $\gamma^1(x) = x$; on pose ensuite :

$$(1.24) \qquad \gamma_t(x) = \sum_{n\geq 0} \gamma^n(x) t^n \in K[[t]]$$

d'où l'on déduit la formule :

$$(1.25) \qquad \gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x) \quad ,$$

ce qui équivaut à

$$(1.25 \text{ bis}) \qquad \lambda_s(x) = \gamma_{s/(1+s)}(x) \quad .$$

Ceci prouve que les λ^i s'expriment à l'aide des γ^i et que $\gamma_t(x + y) = \gamma_t(x)\, \gamma_t(y)$, et par suite que les applications γ^i définissent une nouvelle structure de λ-anneau sur K. La formule (1.22) montre alors que pour $K = \widetilde{A}$ et tout $x \in \widetilde{A}$, on a

$$(1.22 \text{ bis}) \qquad \gamma^n(x - \varepsilon(x)) = [0,\ 1 + (-1)^{n-1}(n - 1)!\ x^n + \dots]$$

et par suite, la *composante* x^n *s'obtient, au facteur* $(-1)^{n-1}(n - 1)!$ *près, en réduisant modulo* $\widetilde{A}^{\,n+1}$ *l'élément* $\gamma^n(x - \varepsilon(x))$ *de* $\widetilde{A}^{\,n}$.

L'homomorphisme de Chern :

Pour tout anneau gradué A vérifiant les conditions précédentes, on va définir un homomorphisme d'anneaux augnentés :

$$(1.26) \qquad ch : \widetilde{A} \longrightarrow \widehat{A \otimes \mathbb{Q}} \quad .$$

Cet homomorphisme est défini sans ambiguité par la condition d'être un homomorphisme additif, de transformer 1 en 1, d'être tel que les composantes de ch(x) en degré > 0 soient données par des polynômes universels isobares à coefficients rationnels en les composantes de x, et que

(1.27) $$\mathrm{ch}([1,\ 1 + x^1]) = \exp x^1 = \sum_{n\geq 0} (x^1)^n/n! \quad .$$

On obtient alors aussitôt l'expression explicite de ch : soit η l'endomorphisme additif de $\widehat{A \otimes \mathbb{Q}}$ défini pour x^i de degré i par

(1.28) $$\eta(x^i) = 1/(-1)^{i-1}(i-1)!\ x^i$$

on a alors

(1.29) $$\mathrm{ch}([n,\ 1 + \sum_{i\geq 1} x^i]) = n + \eta\,(\log\,(\ 1 + \sum_{i\geq 1} x^i)) \quad .$$

Comme on peut "inverser" cette formule, du moins si A n'a qu'un nombre fini de composantes homogènes, on voit que dans ce cas, on a un <u>isomorphisme</u> ch <u>de l'anneau</u> $\widetilde{A} \otimes \mathbb{Q}$ <u>sur l'anneau</u> $\widehat{A \otimes \mathbb{Q}}$ (ce qui élucide complètement la structure de $\widetilde{A} \otimes \mathbb{Q}$).

Rappelons que d'après Hirzebruch [1], une série formelle $f \in \mathbb{Q}[[t]]$ définit par des formules polynômiales universelles un homomorphisme additif $1 + \hat{A}^+ \longrightarrow 1 + (\widehat{A \otimes \mathbb{Q}})^+$, noté $\mathcal{C}_f$; lorsque $f(t) = t/(1 - \exp(- t))$, on pose simplement $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est l'initiale de Todd). On étend la définition de $\mathcal{C}(x)$ à $x \in \widetilde{A}$. **Ceci dit,** on a le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 1.3. <u>Soit</u> $N \in \widetilde{A}$ <u>de la forme</u> $[q,\ 1 + N^1 + \ldots + N^q]$ (on a $N^i = 0$ pour $i > q$). <u>Si l'on pose</u> :

$$\lambda_{-1}(N) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i\lambda^i(N) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\lambda^i(N) \quad ,$$

<u>on aura</u> :

(1.30) $$\mathrm{ch}(\lambda_{-1}(N)) = (-1)^q N^q\,\mathcal{C}(\check{N})^{-1} \quad ,$$

ce qui équivaut à :

$$\text{(1.30 bis)} \qquad ch(\lambda_{-1}(\check{N})) = N^q \mathcal{C}(N)^{-1} \quad .$$

§ 4. Les opérations $\lambda^p(N,x)$

Soit A l'anneau des séries formelles, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, en deux suites infinies d'indéterminées, notées $\lambda^i N$ et $\lambda^i x$ $(i \geq 1)$. On pose $\lambda^1 N = N$ et $\lambda^1 x = x$, et l'on introduit sur A l'unique structure de λ-anneau spécial pour lequel on ait $\lambda^i(N) = \lambda^i N$ et $\lambda^i(x) = \lambda^i x$ et pour lequel les opérations λ^i soient "continues" (si l'on se bornait aux polynômes en des indéterminées $\lambda^i N$ et $\lambda^i x$, on aurait le "λ-anneau libre engendré par N et x" ; notre anneau A en est un complèté). On peut alors former

$$\text{(1.31)} \qquad \lambda_{-1}(N) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \lambda^i N \quad ,$$

qui est une série formelle de terme constant 1, donc inversible ; on peut donc définir sans ambiguïté un élément $\lambda^p(N,x)$ de A en posant

$$\text{(1.32)} \qquad \lambda^p(N,x)\lambda_{-1}(N) = \lambda^p(x\lambda_{-1}(N))$$

Théorème 1.4. Soit J_q l'idéal fermé de A engendré par les $\lambda^i N$ avec $i > q$; identifions A/J_q à l'anneau des séries formelles en les $\lambda^i x$ et les $\lambda^j N$ $(1 \leq j \leq q)$. Alors $\lambda^p(N,x)$ réduit modulo J_q est un polynôme, isobare de poids p par rapport aux variables $\lambda^i x$.

Soient N et F deux espaces vectoriels de dimensions finies q,q' sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0 ; soit $N^{(p)}$ le noyau de l'application $(a_1,\dots,a_p) \longrightarrow a_1 + \dots + a_p$ de N^p dans N. On fait opérer le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ sur N^p, donc sur $N^{(p)}$ donc sur $\Lambda(N^{(p)})$, puis sur $\overset{p}{\otimes} F$ et sur $\Lambda(N^{(p)}) \otimes \overset{p}{\otimes} F$. Considérons cet espace vectoriel comme un module gradué sur $\mathfrak{S}_p \times Gl(N) \times Gl(F)$ et prenons sa "partie alternée" qui est un module gradué sur $Gl(N) \times Gl(F) =: G$. On a alors

$$\lambda^p(N,F) = \underline{E}_G((\Lambda(N^{(p)}) \otimes \overset{p}{\otimes} F)^{alt}) \qquad . \tag{1.33}$$

N.B. Si M est un complexe de G-modules, on note $\underline{E}_G(M)$ la somme alternée dans $\underline{K}(G)$ des classes des composantes de M ; c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M ; dans la formule (1.33), le premier membre $\lambda^p(N,F)$ désigne l'élément de l'anneau $\underline{K}(G)$ obtenu en substituant aux variables $\lambda^i N$ et $\lambda^i F$ les classes dans $\underline{K}(G)$ des G-modules $\Lambda^i(N)$ et $\Lambda^i(F)$ respectivement.

Démonstration : En développant le deuxième membre de (1.32) par la deuxième formule (1.11), on voit que la première assertion est prouvée si on prouve l'assertion analogue obtenue en faisant $x = 1$, i.e. si l'on prouve que dans le λ-anneau $\mathbb{Z}[\lambda^1 N,\dots,\lambda^q N]$ où $\lambda^i N = 0$ pour $i > q$, l'élément $\lambda^p(\lambda_{-1}(N))$ est divisible par $\lambda_{-1}(N)$. A priori, le quotient $\lambda^p(N,1) = \lambda^p(\lambda_{-1}(N))/\lambda_{-1}(N)$ est une série formelle contenue dans le corps des quotients K de l'anneau des séries formelles en les $\lambda^i N$ pour $1 \le i \le q$. D'autre part, désignons aussi par N un vectoriel de dimension q sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0 , et considérons l'élément $\ell^p(N) = \underline{E}_G((\Lambda(N^{(p)})^{alt}) \in \underline{K}(G)$, où maintenant l'on a $G = Gl(N)$. On sait (§ 2, théorème 1.3) que $\underline{K}(G)$ s'identifie au sous-anneau de K engendré par les $\lambda^i N$ pour $1 \leq i \leq q$ et par l'inverse de $\lambda^q N$. D'autre part, on vérifie facilement dans cet anneau que l'on a $\ell^p(N)\,\lambda_{-1}(N) = \lambda^p(\lambda_{-1}(N))$. Comme on est dans un grand corps K et que $\lambda_{-1}(N) \neq 0$, on en conclut $\ell^p(N) = \lambda^p(N,1)$; les deux membres sont dans l'intersection de $\underline{K}(G)$ et de l'anneau des séries formelles en les $\lambda^i N$, donc sont des polynômes en les $\lambda^i N$.

Pour prouver (1.33) dans le cas général, on vérifie que le deuxième membre satisfait dans $\underline{K}(G)$ à la formule analogue à (1.32), c'est-à-dire que son produit par $\lambda_{-1}(N)$ est $\lambda^p(F\,\lambda_{-1}(N))$. De même, le produit de $\lambda^p(N,F) \in \underline{K}(G)$ par $\lambda_{-1}(N)$ est $\lambda^p(F\,\lambda_{-1}(N))$, comme il résulte du fait que $\underline{K}(G)$ est <u>spécial</u>. Comme $\underline{K}(G)$ est intègre (cf § 2) et que $\lambda_{-1}(N) \neq 0$ (même référence), on a bien démontré la formule (1.33).

cqfd.

<u>Remarques</u> : a) Lorsque la dimension q' de F est $\geq p$, alors (1.33) caractérise le polynôme $\lambda^p(N,x)$ en les $\lambda^i N$ $(1 \leq i \leq q)$ et les $\lambda^j x$ $(1 \leq j \leq p)$.

b) Il est plausible que (1.33) est encore vérifiée si le corps k n'est pas algébriquement clos (*). Il faudrait résoudre cette question si l'on voulait prouver le théorème de Riemann-Roch sur un corps de caractéristique 0 non algébriquement clos par la méthode qu'on va exposer. Le passage d'un $\mathfrak{S}_p$-module à sa partie alternée n'a d'ailleurs de sens raisonnable que si le corps de base est de caractéristique 0.

Soit maintenant K un λ-anneau <u>spécial</u> quelconque et soit N un élé-

(*) Cela se prouve en effet par la même méthode.

ment de K tel que $\lambda^i N = 0$ pour i assez grand. On peut alors, pour tout $x \in K$ et tout entier $p \geq 1$, considérer les éléments $\lambda^p(N,x)$, qui s'expriment par des polynômes universels à coefficients entiers en les $\lambda^i N$ et les $\lambda^j x$. On a $\lambda^1(N,x) = x$ et l'on a la formule (1.32) <u>dans</u> K. Pour exprimer les propriétés des opérations $x \mapsto \lambda^p(N,x)$, il est commode d'introduite un nouvel λ-anneau noté K_N. En tant qu'anneau commutatif K_N s'obtient par adjonction d'une unité à l'anneau dont le groupe additif sous-jacent est K et dont la multiplication est donnée par

(1.34) $$x_N y \quad = \quad xy\,\mu \qquad\qquad (\ \mu = \lambda_{-1}(N)\ ) \quad .$$

L'application λ_t de K_N dans $K_N[[t]]$ est définie par :

(1.35) $$\lambda_t(n,x) \quad = \quad (1+t)^n \sum_{p\geq 0} \lambda^p(N,x)t^p \quad ,$$

où l'on a posé $\lambda^o(N,x) = (1,0)$ (élément unité de K_N). Je dis que, <u>muni de ces opérations</u>, K_N <u>est un</u> λ-<u>anneau spécial</u>. Il s'agit donc de vérifier les formules $\lambda_t(X+Y) = \lambda_t(X)\,\lambda_t(Y)$, $\lambda_t(XY) = \lambda_t(X).\lambda_t(Y)$, et $\lambda_t(\lambda^i(X)) = \lambda^i(\lambda_t(X))$ pour $X,Y \in K_N$. On peut se borner à vérifier ces formules lorsque X et Y sont dans K, et l'on constate qu'il suffit de le vérifier lorsque K est le λ-anneau spécial libre engendré par X,Y et N soumis aux relations $\lambda^i N = 0$ pour $i > q$. Mais l'homomorphisme de groupes

(1.36) $$K_N \longrightarrow K\,,$$

qui transforme unité en unité et sur K se réduit à l'homomorphisme $x \longrightarrow x\mu$, est un homomorphisme compatible avec les structures d'anneaux et les applications λ^i, comme on le vérifie aussitôt. Dans le cas actuel, sa restriction à K est <u>injective</u> ; comme K est un λ-anneau spécial, il en résulte facilement que les relations ci-dessus sont bien vérifiées pour $X,Y \in K$, et ceci achève de démontrer notre assertion.

D'après la formule (1.23), il est naturel, pour $x \in K$ et $n \geq 1$, de poser

$$(1.37) \qquad \gamma^n(N,x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \lambda^i(N,x) \quad ,$$

en d'autres termes, on pose $\gamma^n(N,x) = \gamma^n(x_N)$, où x_N désigne x considéré comme élément du λ-anneau K_N .

<u>Proposition</u> 1.5. <u>Soient</u> A <u>un anneau gradué commutatif avec unité</u>, N <u>un élément de</u> $\tilde{A}$ <u>de la forme</u> $N = [q,\ 1 + N^1 + \ldots + N^q]$ <u>et</u> x <u>un élément quelconque de</u> $\tilde{A}$: $x = [\nu,\ 1 + \sum_{i\geq 1} x^i]$. <u>Alors, pour tout entier</u> $j \geq 0$, <u>on a</u> $\gamma^{q+j}(N,x) \in \tilde{A}^j$, <u>et la composante de degré</u> j <u>de</u> $\gamma^{q+j}(N,x)$ <u>est de la forme</u>

$$(1.38) \qquad (\gamma^{q+j}(N,x))^{(j)} = (-1)^{j-1}(j-1)!\ G_{q,j}(\nu,x^1,\ldots,x^j;N^1,\ldots,N^j),$$

<u>où</u> $G_{q,j}$ <u>est un polynôme universel à coefficients entiers caractérisé par la condition</u>

$$(1.39) \qquad G_{q,j}(\nu,x^1,\ldots,N^j)\ N^q = (-1)^q(x * \lambda_{-1}(N))^{(q+j)} \quad .$$

<u>Démonstration</u>. On peut supposer que A est l'anneau des polynômes à coefficients entiers en des indéterminées x^i et N^j (avec $1 \leq j \leq q$). Comme on a évidemment, combinant (1.32) et (1.37)

$$(1.40) \qquad \gamma^n(N,x)\lambda_{-1}(N) = \gamma^n(x\ \lambda_{-1}(N)) \quad ,$$

et que, pour $n = q + j$, le deuxième membre est de filtration $\geq q + j$ (utiliser la formule (1.22 bis) en tenant compte de ce que $x\ \lambda_{-1}(N)$ est d'augmentation nulle), tandis que $\lambda_{-1}(N)$ est de filtration q (formule (1.22)), il en résulte que $\gamma^n(N,x)$ est de filtration j, puisque en vertu de (1.18) le gradué associé à A est ici <u>intègre</u>. Utilisant les formules précédentes, on obtient immédiatement la forme indiquée pour $(\gamma^{q+j}(N,x))^{(j)}$.

cqfd.

CHAPITRE II

Classes de faisceaux algébriques cohérents et classes de Chern

§ 1 . La théorie de Chow

Dans tout ce chapitre, on suppose fixé un <u>corps de base</u> k qu'on supposera algébriquement clos, pour simplifier. Une grande partie de ce qui va suivre, et peut-être tout, est cependant valable sans cette restriction. Les espaces algébriques et les applications régulières considérés seront définis sur k.

Un espace algébrique est dit <u>quasi-projectif</u> s'il est isomorphe à une partie localement fermée d'un espace projectif.

Soit X une variété non singulière quasi-projective connexe de dimension n. On désigne par A(X) et l'on appelle <u>anneau de Chow</u> de X l'anneau gradué des classes de cycles sur X à équivalence rationnelle près. ($A^i(X)$ étant formé des classes de cycles de dimension n - i). Le fait que A(X) soit bien un anneau gradué résulte du théorème suivant de Chow :

Théorème 2.1. (*) Tout cycle sur X est rationnellement équivalent à un cycle non singulier. Etant donnés des éléments de $A^i(X)$ et $A^j(X)$, on peut trouver des représentants non singuliers de ces éléments, soient Y^{n-i} et Z^{n-j}, qui se coupent partout transversalement.

(Un cycle est dit non singulier si ses composantes sont des sous-variétés non singulières. On dit que deux cycles se coupent partout transversalement si toute composante de l'un coupe partout transversalement toute composante de l'autre, i.e. si les deux variétés sécantes sont non singulières aux points d'intersections et si leurs variétés tangentes y sont en position générale ...)

Soit f un morphisme (i.e. une application régulière) de X dans Y (X et Y étant quasi-projectives et non singulières), alors f définit (en utilisant le théorème précédent) un homomorphisme d'anneaux gradués :

(2.1) $$f^* : A(Y) \longrightarrow A(X)$$

(image réciproque de classes de cycles). Ainsi A(X) devient un foncteur contravariant en X.

Soit f un morphisme propre de X^n dans Y^m (i.e. dans la terminologie de Weil, le graphe de f est complet au-dessus de Y, cf [3]). Alors f définit aussi un homomorphisme additif

(2.2) $$f_* : A(X^n) \longrightarrow A(Y^m)$$

conservant la dimension des cycles, donc augmentant le degré de m - n.

(*) Par suite d'un malentendu de la part de l'auteur, le théorème énonce plus qu'il n'est actuellement connu. En fait, on utilise seulement le "moving lemma" de Chow, disant qu'on peut bouger deux cycles dans leurs classes de sorte que leur intersection soit non excédentaire ; cf. Séminaire Chevalley 1958, Anneau de Chow et applications.

Ainsi, relativement aux morphismes propres, et faisant abstraction des structures multiplicatives et des graduations, A(X) est un foncteur covariant en X. Notons la formule classique

$$(2.3) \qquad f_*(x.f^*(y)) = f_*(x).y \quad .$$

Nous utiliserons aussi la théorie de Chow des classes de Chern. Elle consiste à attacher, à tout fibré vectoriel E sur X (toujours supposée quasi-projective non singulière) des <u>classes de Chern</u> $C^i(E) \in A^i(X)$, $(i \geq 1)$, de façon à satisfaire aux conditions suivantes ; on pose $C^o(E) = 1$ et

$$(2.4) \qquad \widetilde{C}(E) = [\text{ rang } E, \sum_{i\geq 0} C^i(E)] \in \widetilde{A}(X)$$

(voir chapitre I, § 3 pour la définition de $\widetilde{A}(X)$). Les conditions à vérifier par une théorie des classes de Chern s'expriment alors ainsi :

$$(2.5) \qquad \widetilde{C}(E) = \widetilde{C}(E') + \widetilde{C}(E'')$$

si le fibré vectoriel E est extension de E' par E" (si l'on pose $C(E) = \sum_{i\geq 0} C^i(E)$, cette condition s'exprime $C(E) = C(E').C(E'')$). La formule (2.5) permet d'étendre $\widetilde{C}$ en un homomorphisme additif de $\underline{K}(\xi(X))$ (cf. Chap. I, § 2, exemple 2) dans $\widetilde{A}(X)$:

$$(2.6) \qquad \widetilde{C} : \underline{K}(\xi(X)) \longrightarrow \widetilde{A}(X) \quad ,$$

et l'on veut que $\widetilde{C}$ soit un λ-<u>homomorphisme de</u> λ-<u>anneaux</u> ; cette dernière condition s'écrit aussi

$$(2.7) \qquad \widetilde{C}(E \otimes F) = \widetilde{C}(E)\, \widetilde{C}(F) \qquad \widetilde{C}(\Lambda^i E) = \lambda^i\, \widetilde{C}(E) \quad ,$$

pour deux fibrés vectoriels E et F (bien entendu, $\widetilde{C}$ est automatiquement compatible avec les augmentations). Soient D un diviseur sur X et L(D) le fibré vectoriel qu'il définit ; on veut

(2.8) $$c^1(L(D)) = \ell(D) \qquad c^i(L(D)) = 0 \qquad (i \geq 1)$$

(où pour un cycle quelconque Z, on note $\ell(Z)$ sa classe dans A(X)). Enfin, on impose que les c^i soient <u>fonctoriels</u>, i.e. que si f est un morphisme de X dans Y et E un fibré vectoriel sur Y, on ait

(2.9) $$c^i(f^!(E)) = f^*(c^i(E)) \quad ,$$

où $f^!(E)$ est l'image inverse de E sur X. On peut aussi écrire (2.9) sous la forme suivante : la notion d'image inverse de fibré définit un λ-homomorphisme de λ-anneaux augmentés

(2.10) $$f^! : \underline{K}(Y) \longrightarrow \underline{K}(X) \qquad (*)$$

(on écrit ici $\underline{K}(X)$ au lieu de $\underline{K}(X))$, et (2.9) signifie qu'on a commutativité dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{f^!} & K(X) \\ {\scriptstyle \widetilde{c}_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{c}_X} \\ A(Y) & \xrightarrow{f^*} & A(X) \end{array} \quad .$$

(on a mis en indice au symbole $\widetilde{c}$ l'espace sur lequel on le considère.)

<u>Théorème</u> 2.2. <u>Il existe une théorie des classes de Chern satisfaisant aux conditions</u> (2.5), (2.7), (2.8) <u>et</u> (2.9).

Nous admettrons aussi la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 2.3. <u>Soit</u> Y <u>une partie fermée de</u> X <u>et soit</u> U <u>son complémentaire</u> ; <u>si</u> x <u>est un élément de</u> A(X) <u>qui induit</u> 0 <u>sur</u> U, <u>il existe un représentant de</u> x <u>qui soit un cycle porté par</u> Y.

(*) La notation $f^!$ utilisée ici est en conflit avec celle utilisée en théorie de la dualité (cf par exemple R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Math. n° 20, Springer, 1966). C'est pourquoi dans ce Séminaire nous la remplaçons par la notation f^*.

<u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $p = \dim X - \dim Y$. <u>Alors</u>, <u>si</u> $i < p$, <u>l'homomorphisme</u> $A^i(X) \longrightarrow A^i(U)$ <u>est bijectif</u>. <u>Tout élément du noyau de</u> $A^p(X) \longrightarrow A^p(U)$ <u>est combinaisons linéaire de composantes de dimension</u> $n - p$ de Y (<u>donc est proportionnel à</u> $\mathcal{L}(Y)$ <u>si</u> Y <u>est irréductible</u>)

§ 2. <u>Définition des classes de Chern des faisceaux algébriques cohérents</u>

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie abélienne, et soit $\mathbb{C}_o$ une sous-classe de $\mathbb{C}$. On désigne par $K(\mathbb{C}_o)$ le groupe quotient du groupe libre engendré par les classes (à isomorphisme près) d'éléments de $\mathbb{C}_o$, par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(E) - (E') - (E'')$, où E est une <u>extension</u> de E' par E'' $(E,E',E''\in\mathbb{C}_o)$. On doit supposer que les classes d'éléments de $\mathbb{C}_o$ pour la relation d'isomorphisme forment un ensemble. On désigne par $\gamma_{\mathbb{C}_o}(E)$ la classe d'un $E \in \mathbb{C}_o$ dans $K(\mathbb{C}_o)$ et l'on omet l'indice $\mathbb{C}_o$ quand il n'y a pas de risque de confusion. Le groupe $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ est solution d'un <u>problème universel</u> relatif aux fonctions $E \longrightarrow f(E)$ définies sur $\mathbb{C}_o$, à valeurs dans un groupe abélien arbitraire A, et qui sont <u>additives</u> en ce sens que $f(E) = f(E') + f(E'')$ chaque fois que E est extension de E' par E''.

Soient F un foncteur additif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$ et $\mathbb{C}'_o$ une sous-classe de $\mathbb{C}'$ satisfaisant à la même condition que $\mathbb{C}_o$, tels que pour tout $A \in \mathbb{C}_o$, les $R^qF(A)$ soient dans $\mathbb{C}'_o$ et nuls pour q assez grand (on suppose que dans $\mathbb{C}$ existent des résolutions injectives, de sorte que les foncteurs dérivés R^qF de F existent) ; alors F définit un homomorphisme de $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ dans $\underline{K}(\mathbb{C}'_o)$, noté encore F, par la formule

(2.11) $$F(\gamma_{\mathbb{C}_o}(E)) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \gamma_{\mathbb{C}'_o}(R^iF(E)) \quad .$$

Plus généralement, si on a un foncteur cohomologique (F^i) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$

tel que pour tout $E \in \mathbb{C}_o$ les $F^i(E)$ soient dans $\mathbb{C}'_o$ et nuls sauf un nombre fini, on en déduit un homomorphisme de $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ dans $\underline{K}(\mathbb{C}'_o)$. Ces remarques s'étendent aux multifoncteurs ; de plus, les suites spectrales "classiques" donnent des propriétés de transitivité que nous n'expliciterons pas.

En particulier, si F est un foncteur exact, la formule (2.11) se simplifie :

(2.11 bis) $$F(\gamma_{\mathbb{C}_o}(E)) = \gamma_{\mathbb{C}'_o}(F(E)) \quad .$$

Ceci s'applique en particulier si $\mathbb{C} = \mathbb{C}'$, si F est le foncteur identique et si $\mathbb{C}_o \subset \mathbb{C}'_o$: on a un homomorphisme canonique de $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ dans $\underline{K}(\mathbb{C}'_o)$.

Théorème 2.3. *Soient $\mathbb{C}$ une catégorie abélienne et $\mathbb{C}_o \subset \mathbb{C}_1$ deux sous-classes telles que les classes* (**à isomorphisme près**) *d'objets de $\mathbb{C}_1$ forment un ensemble. On suppose les conditions suivantes satisfaites*

(i) *Pour toute suite exacte* $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que* A *et* A'' *soient dans* $\mathbb{C}_o$ (resp. $\mathbb{C}_1$), *on a* $A' \in \mathbb{C}_o$ (resp. $A' \in \mathbb{C}_1$).

(ii) *Soient* $u : A \longrightarrow B$ et $v : C \longrightarrow B$ *avec* $A, B, C \in \mathbb{C}_1$ *et* u *surjectif* ; *alors il existe* $L \in \mathbb{C}_o$ *et des homomorphismes* $u' : L \longrightarrow C$ *et* $v' : L \longrightarrow A$ *tels que* u' *soit surjectif et* $vu' = uv'$.

(iii) *Pour tout* $A \in \mathbb{C}_1$, *il existe un entier* $d = d(A)$ *tel que pour toute résolution gauche* L *de* A *par des objets de* $\mathbb{C}_o$, *on ait* $Z_d(\underline{L}) \in \mathbb{C}_o$ (Z_d désigne les cycles de dimension d).

Dans ces conditions, l'homomorphisme canonique de $K(\mathbb{C}_o)$ *dans* $K(\mathbb{C}_1)$ *est un isomorphisme*.

Principe de la démonstration : soit $A \in \mathbb{C}_1$; il existe en vertu de (ii) et (iii) une résolution finie $\underline{L}$ de A par des objets de $\mathbb{C}_o$; posons alors $f(A) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \gamma_{\mathbb{C}_o}(L^i)$. On montre que l'élément de $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ ainsi construit ne dépend pas de la résolution $\underline{L}$ choisie : si on a une deuxième résolution $\underline{L}'$, on "coiffe" $\underline{L}$ et $\underline{L}'$ par une troisième résolution $\underline{L}''$, avec des homomorphismes surjectifs de $\underline{L}''$ dans $\underline{L}$ et $\underline{L}'$ (ce qui est possible grâce à (i) et (ii) ; on est alors ramené à prouver $\underline{E}_{\mathbb{C}_o}(\underline{L}) = \underline{E}_{\mathbb{C}_o}(\underline{L}'')$. Or la différence des deux est $\underline{E}_{\mathbb{C}_o}(\underline{N})$ où $\underline{N}$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif de $\underline{L}''$ sur $\underline{L}$, noyau qui est dans $\mathbb{C}_o$ d'après (i). Or $\underline{N}$ est un complexe acyclique en toutes dimensions, d'où $E_{\mathbb{C}_o}(\underline{N}) = 0$, d'où la conclusion (N.B. $\underline{E}_{\mathbb{C}_o}(\underline{L})$, pour un complexe fini à valeurs dans $\mathbb{C}_o$, désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum_{i\geq 0} (-1)^i \gamma_{\mathbb{C}_o}(L^i)$ de $\underline{L}$).

On prouve de façon analogue que la fonction $f : \mathbb{C}_1 \longrightarrow \underline{K}(\mathbb{C}_o)$ ainsi construite est additive, donc définit un homomorphisme de $\underline{K}(\mathbb{C}_1)$ dans $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$, et il est immédiat que cet homomorphisme est inverse de l'homomorphisme canonique de $\underline{K}(\mathbb{C}_o)$ dans $\underline{K}(\mathbb{C}_1)$.

cqfd.

Remarque : Pour vérifier (ii), il suffit de vérifier que $\mathbb{C}_1$ est contenu dans une sous-classe $\mathbb{C}_2$ de $\mathbb{C}$ satisfaisant aux deux conditions

(ii a) Tout $A \in \mathbb{C}_2$ est isomorphe à un quotient d'un $L \in \mathbb{C}_o$.

(ii b) Si $u : A \longrightarrow B$, avec $A,B \in \mathbb{C}_2$, alors $\mathrm{Ker}\, u \in \mathbb{C}_2$.

Corollaire : Soit X un espace algébrique quasi-projectif. Soient $\mathcal{F}(X)$ la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, $\xi(X)$ la catégorie des faisceaux algébriques cohérents localement libres (équivalente à la catégorie des fibrés vectoriels sur X), $\mathcal{F}_o(X)$ la catégorie des faisceaux algébriques cohérents F tels que pour tout $x \in X$, F_x soit un $\underline{O}_x$-module *de dimension cohomologique finie (on a donc* $\xi(X) \subset \mathcal{F}_o(X) \subset \mathcal{F}(X)$*). Alors l'homomorphisme canonique*

$$K(\xi(X)) \longrightarrow K(\mathcal{F}_o(X)) \tag{2.12}$$

est un isomorphisme.

On va vérifier les conditions du théorème 2.3. Les conditions (i) et (iii) résultent de la définition de la dimension cohomologique et du fait qu'un module projectif de type fini sur l'anneau local noethérien $\underline{O}_x$ est libre. Pour vérifier (ii), on va démontrer que $\mathcal{C} = \mathcal{F}(X)$ satisfait aux conditions (ii a) et (ii b) de la remarque. La deuxième est triviale ; il reste donc à prouver le résultat suivant :

Proposition 2.4. (Serre). *Soit* X *un espace algébrique quasi-projectif. Alors tout faisceau algébrique cohérent sur* X *est isomorphe au quotient d'un faisceau algébrique localement libre.*

Cette proposition est vraie si X est une partie fermée de l'espace projectif en vertu de [2], puisque, pour n assez grand, F(n) est engendré par ses sections, ce qui signifie que F est un quotient de $\underline{O}(-n)^k$. Dans le cas général, X est une partie ouverte d'une partie fermée d'un espace projectif, et il suffit d'utiliser le résultat suivant (dû à Cartier et Serre dans des cas particuliers) :

Proposition 2.5. *Soit* F *un faisceau algébrique cohérent sur une partie ouverte* U *d'un espace algébrique* X. *Alors* F *est isomorphe à la restriction d'un faisceau algébrique cohérent sur* X.

En zornifiant sur les ouverts contenant U sur lesquels on peut prolonger F, on est ramené au cas où X est affine. Soit $\overline{F}$ le faisceau algébrique sur X dont les sections sur un ouvert V sont les sections de F sur $U \cap V$. On constate facilement que $\overline{F}$ est <u>quasi-cohérent</u> (i.e. défini sur tout ouvert affine V -- donc ici sur X tout entier -- par un module, de type fini ou non, sur l'anneau de coordonnées de l'ouvert en question). C'est immédiat si U est lui-même affine, car $\overline{F}$ est alors défini sur l'ouvert V par $\Gamma(U \cap V, F)$ considéré comme module sur $\Gamma(V, \underline{O}_X)$. Dans le cas général, U est réunion finie d'ouverts affines U_i, donc $\overline{F}$ est le noyau d'un homomorphisme évident de faisceaux quasi-cohérents :

$$\sum_i \overline{F \mid U_i} \longrightarrow \sum_{i,j} \overline{F \mid U_i \cap U_j}$$

donc est lui-même quasi-cohérent. Comme X est supposé affine, $\overline{F}$ est donc engendré par ses sections. Comme $\overline{F} \mid U = F$ est cohérent, il existe un nombre fini de sections de $\overline{F}$ qui engendrent $\overline{F} \mid U$. Ces sections engendrent un sous-faisceau cohérent de $\overline{F}$, dont la restriction à U est isomorphe à F.

cqfd.

Supposons maintenant X quasi-projective <u>non singulière</u>. Alors, en vertu du théorème des syzygies, on a, avec les notations du corollaire au théorème 2.3, $\mathfrak{F}_o(X) = \mathfrak{F}(X)$. Dans ce cas, on a donc :

$$\underline{K}(\xi(X)) = \underline{K}(\mathfrak{F}(X)) \quad . \tag{2.13}$$

On peut exprimer ainsi cet isomorphisme :

<u>Corollaire</u> 2 <u>au théorème</u> 2.3. <u>Soit</u> X <u>une variété quasi-projective non-singulière</u>. <u>Pour tout groupe abélien</u> A, <u>il y a correspondance biunivoque entre les fonctions addtives</u> f <u>de fibrés vectoriels sur</u> X, <u>à valeurs dans</u> A, <u>et les fonctions additives</u> g <u>de faisceaux algébriques cohérents sur</u> X, <u>à valeurs dans</u> A. <u>A toute</u> f <u>correspond l'unique</u> g <u>telle que l'on ait</u> :

(2.14) $$f(E) = g(\underline{O}_X(E))$$

<u>pour tout fibré vectoriel</u> E <u>sur</u> X, <u>en notant</u> $\underline{O}_X(E)$ <u>le faisceau des germes de sections régulières de</u> E <u>sur</u> X.

Pour calculer g(F) pour un faisceau algébrique cohérent quelconque, on considère une résolution finie de F par des faisceaux de la forme $\underline{O}_X(E_i)$, et l'on a alors :

(2.14 bis) $$g(F) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i f(E_i) \quad .$$

En particulier, si X est connexe, on a envisagé au § 1 une fonction additive $\widetilde{C}(E)$ du fibré vectoriel E, à valeurs dans le groupe $\widetilde{A} = \widetilde{A}(X)$. On en déduit une fonction additive de faisceaux cohérents, soit $\widetilde{C}(F)$, et en passant aux composantes, des fonctions $F \to C^i(F) \in A^i(X)$. Les $C^i(F)$ sont appelées les <u>classes de Chern du faisceau cohérent</u> F ; elles se calculent théoriquement à partir des classes de Chern des fibrés vectoriels par (2.14 bis) (mais où il faut passer au deuxième membre à l'écriture multiplicative). Quant à la composante de $\widetilde{C}(F)$ suivant $\mathbb{Z}$, c'est le <u>rang</u> du faisceau F, qui correspond au rang d'un module sur un anneau intègre : si X est affine (cas auquel on peut toujours se ramener), F est défini par un module de type fini sur l'anneau de coordonnées de X, et l'on prend le rang de ce module ....

§ 3. <u>Généralités fonctorielles sur</u> $\underline{K}(X)$

Si X est un espace algébrique, on pose pour abréger $\underline{K}(X) = \underline{K}(\mathfrak{F}(X))$, et lorsque X est quasi-projectif non singulier, on identifie ce groupe à $\underline{K}(\xi(X))$ en vertu du corollaire 2 au théorème 2.3. Comme $\underline{K}(\xi(X))$ est non seulement un groupe abélien, mais un λ-anneau, il s'ensuit par transport de structure que $\underline{K}(X)$ est aussi un λ-anneau, donc est muni d'une structure multiplicative et d'applications λ^i. Il importe de définir ces structures directement, sans passer aux fibrés vectoriels, ce qui sera fait ci-dessous.

Si E est un fibré vectoriel sur X, on désigne par $\gamma(E)$ sa classe dans $\underline{K}(X)$; si F est un faisceau algébrique cohérent sur X, $\gamma(F)$ désigne de même sa classe dans $\underline{K}(X)$. Si Y est une sous-variété irréductible de X, on pose $\gamma(Y) = \gamma(\underline{O}_Y)$, où $\underline{O}_Y$ désigne le faisceau des anneaux locaux de Y, considéré comme faisceau algébrique cohérent sur X. On définit par linéarité le symbole $\gamma(Y)$ lorsque Y est un cycle quelconque sur X. Quand il y aura des risques de confusion, on écrira γ_X pour γ .

Soit X un espace algébrique quelconque. On introduit sur $\underline{K}(X)$ une <u>filtration</u>, en désignant par $\underline{K}(X)^i$ le sous-groupe de $\underline{K}(X)$ engendré par les $\gamma(F)$ avec dim.supp. $F \leq n - i$ (où n est la dimension de X). Il résulte du "lemme de dévissage" de Serre, sous la forme donnée dans [3], le résultat suivant :

<u>Proposition</u> 2.6. <u>Le groupe</u> $\underline{K}(X)^i$ <u>est engendré par les</u> $\gamma(Y)$, <u>où</u> Y <u>parcourt l'ensemble des sous-variétés de dimension</u> $\leq n - i$ <u>de</u> X. <u>Si</u> X <u>est irréductible</u>, <u>on a</u> $G^o(\underline{K}(X)) = \mathbb{Z}$.

Ce dernier isomorphisme est donné par l'homomorphisme de $\underline{K}(X)$ dans $\mathbb{Z}$ défini à l'aide de la notion de <u>rang</u> d'un faisceau algébrique cohérent.

Supposons maintenant X <u>non singulière</u>. S'inspirant des développements du début du § 2, on définit une multiplication dans $\underline{K}(X)$ en posant

$$(2.15) \qquad \gamma(F)\,\gamma(G) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \,\gamma\,(\underline{\mathrm{Tor}}_i(F,G))$$

(les $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ étant pris, bien entendu, par rapport aux anneaux locaux de X). La suite exacte des $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ montre que la formule (2.15) définit bien une application biadditive de $\underline{K}(X)\times\underline{K}(X)$ dans $\underline{K}(X)$; l'associativité résulte de la suite spectrale des Tor multiples. On vérifie aussi de cette façon que l'on peut calculer le produit de plusieurs facteurs par la formule :

$$(2.16) \qquad \gamma(F_1)\ldots\gamma(F_p) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \gamma(\underline{\mathrm{Tor}}_i(F_1,\ldots,F_p))$$

où, dans le deuxième membre, les $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ sont des "$\underline{\mathrm{Tor}}$ simultanés", calculés par résolution projective simultanée des arguments F_i.

Si l'on suppose dans (2.15) que G est _localement libre_, on trouve :

$$(2.15\text{ bis}) \qquad \gamma(F)\,\gamma(G) = \gamma(F\otimes G) \quad ,$$

ce qui montre en particulier que $\gamma(\underline{O}_X)$ est élément unité de $\underline{K}(X)$, et que l'homomorphisme canonique de $\underline{K}(\xi(X)$ dans $\underline{K}(X)$ est un homomorphisme d'anneaux.

La formule (2.15) est évidemment suggérée par la "formule des Tor" de Serre en théorie des intersections. Cette formule prouve la deuxième partie de la proposition suivante, la première résultant immédiatement de la formule (2.15) et d'un calcul de $\underline{\mathrm{Tor}}_i$ locaux :

Proposition 2.7. _Soient_ X _une variété non singulière_, Y _et_ Z _deux cycles dans_ X. _Si_ Y _et_ Z _se coupent partout transversalement_, _on a_ :

$$(2.17) \qquad \gamma(Y)\,\gamma(Z) = \gamma(Y.Z) \quad .$$

_Si_ Y _et_ Z _sont homogènes et de dimension respective_ n - i _et_ n - j, _et s'ils se coupent sans composante excédentaire_, _on a alors_ :

(2.18) $\gamma(Y)\,\gamma(Z) = \gamma(Y.Z) \qquad \mathrm{mod.}\ \underline{K}(X)^{i+j+1}$.

On fera attention à ce qu'on n'a pas en général égalité dans (2.18). On verra au § 4 que, si X est quasi-projective non singulière, la structure d'anneau de $\underline{K}(X)$ est compatible avec sa filtration et que l'anneau gradué associé $G(\underline{K}(X))$ s'identifie à un quotient de $A(X)$ par un sous-groupe de torsion (peut-être toujours réduit à 0 (*)).

Je ne sais définir directement les $\lambda^i(F)$ en termes de faisceaux que si le corps k est de caractéristique 0 (c'est la raison qui nous a empêché de démontrer le théorème de Riemann-Roch lorsque k n'est pas de caractéristique $\neq 0$). Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X sur lequel opère le groupe $\mathfrak{S}_p$ des permutations de p lettres ; on note alors $(F)^{alt}$ l'ensemble des $x \in F$ tels que $s.x = \varepsilon(s)x$ pour tout $s \in \mathfrak{S}_p$ ($\varepsilon(s)$ est la signature de s). C'est évidemment un sous-faisceau algébrique cohérent de F. Ceci dit, on a :

Théorème 2.8. Soit X une variété quasi-projective non singulière sur le corps k de caractéristique 0. Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X ; on a alors :

(2.19) $$\lambda^p(\gamma(F)) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i\,\gamma((\underline{\mathrm{Tor}}_i(F,F,\ldots,F))^{alt})$$

N.B. Il est clair que le groupe $\mathfrak{S}_p$ agit sur le faisceau $\underline{\mathrm{Tor}}_i(F,\ldots,F)$.

Principe de la démonstration : on considère une résolution finie $\underline{L}$ de F par des faisceaux localement libres L_i, et l'on utilise le lemme général suivant :

(*) Non ; pour un contre-exemple cf. ce Séminaire XIV 4.7.

Lemme 2.9. Soit $\underline{L} = (L_i)$ un faisceau algébrique cohérent localement libre gradué, ayant un nombre fini de composantes non nulles. On a dans $\underline{K}(X)$ la formule :

$$(2.20) \qquad \underline{E}((\overset{p}{\otimes}\underline{L})^{alt}) = \Lambda^p(\underline{E}(\underline{L})) \quad .$$

Dans cette formule, on considère $\overset{p}{\otimes}\underline{L}$ comme un faisceau où le groupe $\mathfrak{S}_p$ opère en tenant compte des graduations (qui introduisent donc des signes de façon bien connue, cf Cartan-Eilenberg) ; de plus, si $\underline{M}$ est un faisceau algébrique cohérent gradué sur X, on pose $\underline{E}(\underline{M}) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \gamma(M_i)$.

Pour prouver la formule (2.20), on est ramené à prouver la formule analogue dans $\underline{K}(G)$, G étant un groupe algébrique (un produit de groupes Gl(n,k) si l'on y tient) et $\underline{L}$ un G-module de dimension finie sur k (cf. Chap. I , § 2, exemple 2, pour la définition de $\underline{K}(G)$). Dans ce cas, cette formule a déjà été utilisée dans le théorème 1.4, pour montrer que le deuxième membre de (1.33) satisfait la même équation fonctionnelle que le premier membre ; la vérification en est élémentaire.

cqfd.

Soit f un morphisme de X dans Y, Y étant un espace algébrique. La notion d'image inverse de fibré vectoriel définit un homomorphisme $f^! : \underline{K}(\xi(Y)) \longrightarrow \underline{K}(\xi(X))$ de λ-anneaux. Identifiant les fibrés vectoriels à des faisceaux algébriques localement libres, la notion d'image réciproque de fibré vectoriel correspond à la notion d'image réciproque de faisceau algébrique (déjà utilisée dans [3, n° 8]). Dans le cas où Y est non singulière, on définit plus généralement un homomorphisme de groupes :

$$(2.21) \qquad f^! : \underline{K}(Y) \longrightarrow \underline{K}(X)$$

par une formule faisant intervenir une somme alternée de Tor, inspirée par les développements du début du § 2, et que le lecteur explicitera. On a alors commutativité dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \underline{K}(\xi(Y)) & \xrightarrow{f^{!}} & \underline{K}(\xi(X)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{K}(Y) & \xrightarrow{f^{!}} & \underline{K}(X) \end{array} ,$$

ce qui montre en particulier, lorsque X et Y sont toutes deux non singulières et quasi-projectives, que les deux définitions de $f^{!}$ coïncident moyennant l'identification de $\underline{K}(X)$ à $\underline{K}(\xi(X))$ et de $\underline{K}(Y)$ à $\underline{K}(\xi(Y))$.

Un autre cas où l'on peut définir un homomorphisme (2.21), sans que Y soit nécessairement non singulière, est celui où le foncteur $F \longrightarrow f^{!}(F)$ de $\mathcal{F}(Y)$ dans $\mathcal{F}(X)$ est exact, i.e. lorsque les anneaux locaux de X sont des modules <u>plats</u> sur les anneaux locaux de Y. Il suffit alors de poser $f^{!}(\gamma_Y(F)) = \gamma_X(f^{!}(F))$. Ce cas se rencontre en particulier lorsque X est un espace fibré localement trivial sur Y (pour le voir, on est ramené au cas d'un produit $X = T \times Y$). Notons qu'on vérifie aussi que dans ce cas, on a $f^{!}(\underline{O}_Z) = \underline{O}_{f^{-1}(Z)}$ si Z est une sous-variété irréductible de Y, d'où :

(2.22) $$f^{!}(\gamma_Y(Z)) = \gamma_X(f^{-1}(Z))$$

<u>si</u> X <u>est</u> <u>"plat"</u> <u>sur</u> Y. Sans cette dernière condition, la formule (2.22) devient inexacte en général, mais on a l'analogue suivant de la proposition 2.7 :

<u>Proposition</u> 2.8. <u>Soit</u> $f : X \longrightarrow Y$ <u>un morphisme de variétés non singulières,</u> <u>et soit</u> Z <u>un cycle sur</u> Y. <u>Si</u> Z <u>est partout transversal à</u> f, <u>la formule</u>

(2.22) <u>est exacte</u> ; <u>si</u> Z <u>est homogène de codimension</u> i <u>et si</u> $f^{-1}(Z)$ <u>n'a pas de composante excédentaire</u>, <u>on a</u> :

$$f^{!}(\gamma_Y(Z)) \equiv \gamma_X(f^{-1}(Z)) \quad . \qquad \text{mod. } \underline{K}(X)^{i+1} \tag{2.23}$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 2.7.

Signalons enfin qu'on verra au § 4 que, <u>lorsque</u> X <u>et</u> Y <u>sont quasi-projectives et non singulières</u>, <u>alors</u> $f^{!}$ <u>est compatible avec les filtrations de</u> $\underline{K}(X)$ <u>et de</u> $\underline{K}(Y)$.

Soient de nouveau X et Y deux espaces algébriques quelconques, et f un morphisme <u>propre</u> de X dans Y. Pour tout faisceau algébrique cohérent F sur X, le faisceau image directe $f_!(F)$ est algébrique cohérent, et il en est de même plus généralement des faisceaux $R^q f_!(F)$ (cf. [3]). Rappelons que, par définition, $R^q f_!(F)$ est le faisceau sur Y associé au préfaisceau qui à l'ouvert U fait correspondre le groupe $H^q(f^{-1}(U),F)$; on a en particulier :

$$R^o f_!(F) = f_!(F), \quad R^q f_!(F) = 0 \qquad (q > \dim X) \ , \tag{2.24}$$

de plus :

$$\Gamma(U,R^q f_!(F)) = H^q(f^{-1}(U),F) \tag{2.25}$$

<u>si l'ouvert</u> U <u>est affine</u>. D'après le § 2, on définit un homomorphisme de $\underline{K}(X)$ dans $\underline{K}(Y)$, noté encore $f_!$, par la formule

$$f_!(\gamma_X(F)) = \sum_{q\geq 0} (-1)^q \ \gamma_Y(R^q f_!(F)) \quad . \tag{2.26}$$

Ainsi $\underline{K}(X)$ devient un <u>foncteur covariant en</u> X, relativement aux morphismes <u>propres</u>. La relation $(fg)_! = f_! g_!$ (tout comme la relation $(fg)^{!} = g^{!} f^{!}$ qu'on a oubliée de signaler en son lieu) est un cas particulier des relations de transitivité auxquelles nous avions fait allusion au § 2, et qui résultent des suites spectrales des foncteurs composés.

Notons la formule suivante, valable pour Y non singulière (et particulièrement aisée à vérifier lorsque Y est de plus quasi-projective, en prenant pour y la classe d'un fibré vectoriel sur Y) :

(2.27) $$f_!(x.f^!(y)) = f_!(x).y \qquad (x.\in \underline{K}(X)\ ,\ y \in \underline{K}(Y))\ .$$

Dans le cas particulier où les images réciproques des points de Y par f sont finies, et contenues dans un ouvert affine (*), on constate que le foncteur $F \longrightarrow f_!(F)$ est exact et que $R^q f_!(F) = 0$ pour $q > 0$; dans ce cas, on a donc $f_!(\gamma_X(F)) = \gamma_Y(f_!(F))$. En particulier, si X est un sous-espace algébrique de Y et si i est l'injection canonique de Y dans X, on a :

(2.28) $$i_!(\gamma_X(F)) = \gamma_Y(F) \qquad ,$$

où, dans le deuxième membre, F est considéré comme un faisceau sur Y nul en dehors de X.

§ 4. Quelques résultats techniques

Soit X un espace algébrique ; on a vu au § 3 que la projection p de $X \times k$ sur X définit un homomorphisme

(2.29) $$p^! : \underline{K}(X) \longrightarrow \underline{K}(X \times k) \qquad .$$

Proposition 2.9. L'homomorphisme (2.29) est surjectif.

On raisonne par récurrence sur n = dim X ; l'assertion est triviale si $n < 0$; supposons $n \geq 0$; en vertu de la proposition 2.6, il suffit de

(*) Cette dernière condition est évidemment conséquence de la première (chose que l'auteur ignorait encore en 1957 !).

vérifier que pour toute partie fermée irréductible Y de $X \times k$, $\gamma(Y)$ est dans l'image de $p^!$. Il suffit de continuer le raisonnement en supposant X irréductible ; si $p(Y)$ n'est pas dense dans X, notre assertion résulte de l'hypothèse de récurrence ; sinon, on a $Y = X \times k$ et l'assertion est triviale, ou bien Y est une hypersurface dans $X \times k$. Soit alors U un ouvert affine de X formé de points non singuliers ; si D est le diviseur sur $U \times k$ induit par Y, on sait (algèbre commutative) qu'il est linéairement équivalent à un diviseur de la forme $D' \times k$, où D' est un diviseur sur U. Alors $\gamma_{U \times k}(D) - \gamma_{U \times k}(D' \times k)$ appartient à $\underline{K}(U \times k)^2$ (corollaire de la proposition 2.10), et d'après ce qu'on a déjà démontré, cet élément est de la forme $p^!(x')$ avec $x' \in \underline{K}(U)$. Donc $\gamma_{U \times k}(D) = p^!(y')$ avec $y' = x' + \gamma_U(D')$; mais y' est restriction d'un élément y de $\underline{K}(X)$ (prop. 2.10), et par suite la restriction de $\gamma_{X \times k}(D) - p^!(y)$ à $U \times k$ est nulle ; d'après la proposition 2.10, $\gamma_{X \times k}(D) - p^!(y))$ provient d'un élément de $\underline{K}(X \times k - U \times k) = \underline{K}(X' \times k)$ avec $X' = X - U$. La démonstration s'achève en appliquant de nouveau l'hypothèse de récurrence.

cqfd.

<u>Corollaire</u> : <u>Soient</u> X <u>un espace algébrique et</u> p <u>la projection de</u> $X \times k^n$ <u>sur</u> X ; <u>alors l'homomorphisme</u> $p^!$: $\underline{K}(X) \longrightarrow \underline{K}(X \times k^n)$ <u>est surjectif</u> ; <u>il est même bijectif si</u> X <u>est non singulière</u>.

Récurrence sur n pour la première assertion. Pour la deuxième, on pose $f(x) = (x,0)$ d'où $pf = \underline{1}$ et $f^! p^! = 1$, ce qui prouve que $p^!$ est injectif.

<u>Proposition</u> 2.10. <u>Soient</u> X <u>un espace algébrique</u>, U <u>une partie ouverte de</u> X <u>et</u> Y <u>son complémentaire dans</u> X. <u>Alors la suite d'homomorphismes naturels</u> :

(2.30) $$\underline{K}(Y) \longrightarrow \underline{K}(X) \longrightarrow \underline{K}(U) \longrightarrow 0$$

<u>est exacte</u>.

N.B. On comparera avec la proposition 2.3 .

Le fait que $\underline{K}(X) \longrightarrow \underline{K}(U)$ soit surjectif résulte aussitôt de la proposition 2.5 (où aussi de la proposition 2.6). Reste à prouver que si $x \in \underline{K}(X)$ a une restriction nulle à $\underline{K}(U)$, il est dans l'image de $\underline{K}(Y)$. Pour ceci, on revient à la définition explicite de $\underline{K}(X)$ et de $\underline{K}(U)$: on a deux faisceaux algébriques cohérents F et G sur X avec $x = \gamma_X(F) - \gamma_X(G)$ et $\gamma_U(F) - \gamma_U(G) = 0$; cette dernière relation signifie qu'on peut trouver des faisceaux cohérents P' et Q' sur U, munis de filtrations dont les facteurs soient deux à deux isomorphes sur U, et tels que l'on ait un isomorphisme sur U :

$$P = F + Q' \longrightarrow Q = G + P' .$$

En vertu de la proposition 2.5, les faisceaux P' et Q' sont des restrictions à U de faisceaux cohérents sur X (notés par les mêmes lettres) ; de même, leurs filtrations proviennent de filtrations sur les faisceaux correspondants sur X, en vertu du lemme 2.11 ci-dessous. On a alors :

$$\gamma_X(F) - \gamma_X(G) = (\gamma_X(P) - \gamma_X(Q)) + (\gamma_X(P') - \gamma_X(Q')) .$$

Introduisant les facteurs P'_i et Q'_j des filtrations de P' et Q' sur X, le dernier terme est la somme de termes $\gamma_X(P'_i) - \gamma_X(Q'_i)$, où $P'_i|U \simeq Q'_i|U$.
On est ainsi ramené à prouver le cas particulier suivant : si R et S sont des faisceaux cohérents sur X tels que $R|U \simeq S|U$, alors $\gamma_X(R) - \gamma_X(S)$ est dans l'image de $\underline{K}(Y)$. Or soit T le graphe de l'isomorphisme donné de $R|U$ sur $S|U$; c'est un sous-faisceau cohérent de $(R \times S)|U$, donc en vertu du lemme 2.11, c'est la restriction à U d'un sous-faisceau cohérent,

noté encore T, de $R \times S$. On a alors $\gamma_X(R) - \gamma_X(S) = (\gamma_X(R) - \gamma_X(T)) - (\gamma_X(S) - \gamma_X(T))$ et il suffit de prouver par exemple que le premier terme du second membre est dans l'image de $\underline{K}(Y)$. Or la projection $u : T \longrightarrow R$ est un isomorphisme sur U, donc $\gamma_X(R) - \gamma_X(T) = \gamma_X(\mathrm{Coker}\ u) - \gamma_X(\mathrm{Ker}\ u)$ et Ker u et Coker u ont leur support dans Y.

Il reste donc à prouver le lemme suivant :

Lemme 2.11. *Soient* X *un espace algébrique*, F *un faisceau algébrique cohérent sur* X, U *une partie ouverte de* X *et* G *un sous-faisceau cohérent de* $F|U$. *Alors* G *est la restriction à* U *d'un sous-faisceau cohérent de* F.

Soit $\overline{G}$ le sous-faisceau de F dont les sections sur l'ouvert V de X sont les sections de F sur V dont la restriction à $U \cap V$ est une section de V. Tout revient à prouver que ce faisceau $\overline{G}$ est cohérent. Pour ceci, on peut supposer X et U affines (car U est réunion d'ouverts affines U_i, et $\overline{G}$ est alors intersection des faisceaux analogues $\overline{G|U_i}$). Alors l'anneau de coordonnées de U est un anneau de fractions A_S de l'anneau de coordonnées A de X, et l'on vérifie aussitôt que si F est défini par le A-module M, alors $F|U$ est défini par le A_S-module $M_S = A_S \otimes_A M$. Le sous-faisceau G de $F|U$ est alors défini par un sous-module N' de M_S, et l'on voit que $\overline{G}$ est précisément défini par le sous-module N de M, image inverse de N' par l'homomorphisme canonique de M dans M_S.

cqfd.

Corollaire 1 à la proposition 2.10 : *Soit* $x \in \underline{K}(X)$. *Pour que* x *soit de filtration* $\leq i$, *il faut et il suffit qu'il existe une partie fermée* Y *de* X, *de dimension* $\leq n - i$, *telle que la restriction de* x *à* X - Y *soit nulle*.

Corollaire 2. Supposons X connexe de dimension n, sans singularités en dimension n - 1. Si D et D' sont deux diviseurs linéairement équivalents sur X, on a $\gamma(D) \equiv \gamma(D') \mod. \underline{K}(X)^2$.

En vertu du corollaire 1, on peut supposer X non singulière ; le corollaire résulte alors de la formule générale :

(2.31) $$\gamma(D) = 1 - \gamma(L(-D)) \qquad \mod \underline{K}(X)^2 ,$$

où L(-D) désigne le fibré vectoriel de rang 1 défini par le diviseur - D. Pour vérifier (2.31), on l'écrit sous la forme :

(2.31 bis) $$\gamma(L(-D)) = 1 - \gamma(D) \qquad \mod \underline{K}(X)^2 ,$$

et l'on note que les deux membres sont des homomorphismes du groupe des diviseurs dans le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\underline{K}(X)/\underline{K}(X)^2$ (noter que $\underline{K}(X)^1/\underline{K}(X)^2$ est de carré nul, ce qui se vérifie très facilement sur la formule explicite (2.15), en utilisant le corollaire 1). On est ainsi ramené au cas où D est une hypersurface irréductible. Plus généralement, si D est une hypersurface dont les composantes sont disjointes, on a l'égalité :

(2.32) $$\gamma(D) = 1 - \gamma(L(-D))$$

comme il résulte de la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \underline{O}_X(L(-D)) \longrightarrow \underline{O}_X \longrightarrow \underline{O}_D \longrightarrow 0 \quad .$$

Théorème 2.12. Soient X une variété quasi-projective non singulière, Z et Z' deux cycles homogènes de codimension p sur X qui sont linéairement équivalents. On a alors :

(2.33) $$\gamma_X(Z) \equiv \gamma_X(Z') \qquad \mod \underline{K}(X)^{p+1} .$$

Par hypothèse, on peut trouver un cycle Y de dimension n - p + 1 sur

$X \times k$ (n est la dimension de X), et deux points $a, a' \in k$ tels que l'on ait :

$$Z = f_a^{-1}(Y) \ , \qquad Z' = f_{a'}^{-1}(Y) \ ,$$

où l'on pose $f_u(x) = (x,u)$. En vertu de la formule (2.23), on a alors :

$$\gamma_X(Z) \equiv f_a^{!}(\gamma_{X \times k}(Y)) \qquad \text{mod } \underline{K}(X)^{p+1}$$

et une formule analogue pour $\gamma_X(Z')$. Il suffit alors de prouver que $f_a^{!} = f_{a'}^{!}$, ce qui résulte aussitôt de la proposition 2.9.

cqfd.

Corollaire 1 : La filtration de $\underline{K}(X)$ est compatible avec sa structure d'anneau, i.e. on a $\underline{K}(X)^i \ \underline{K}(X)^j \subset \underline{K}(X)^{i+j}$ quels que soient les entiers $i,j \geq 0$. On a de plus un homomorphisme surjectif naturel d'anneaux gradués :

(2.34) $$\varphi : \ A(X) \longrightarrow G(K(X))$$

(où le deuxième membre désigne l'anneau gradué associé à $\underline{K}(X)$ muni de la filtration $(\underline{K}(X)^i)_{i \geq 0}$) défini par la condition :

$$\varphi(Z^{n-p}) = \gamma(Z^{n-p}) \ \text{mod } \underline{K}(X)^{p+1} \ .$$

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 2.12, des propositions 2.6 et 2.7 et du théorème de Chow 2.1, par récurrence sur l'entier $i + j$.

Corollaire 2 : Soient X et Y deux variétés quasi-projectives non singulières et f un morphisme de X dans Y. Alors l'homomorphisme $f^{!}$ de $\underline{K}(Y)$ dans $K(X)$ est compatible avec les filtrations, et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G(\underline{K}(Y)) \arrow[r, "G(f^{!})"] & G(\underline{K}(X)) \\ A(Y) \arrow[u, "\varphi_Y"'] \arrow[r, "f^*"] & A(X) \arrow[u, "\varphi_X"'] \end{tikzcd} \ .$$

Utilisant le graphe de f, on décompose f en produit d'une immersion de X dans $X \times Y$ et d'une projection de $X \times Y$ sur Y. Pour cette dernière le corollaire est trivial, et pour une immersion, on procède comme pour le corollaire 1, en utilisant la proposition 2.8 à la place de la proposition 2.7.

Proposition 2.13 ("décomposition cellulaire") : Soit P un espace algébrique (irréductible ou non), muni d'une famille croissante $P^o \subset P^1 \subset \ldots \subset P^n = P$ de parties fermées, telles que pour tout i avec $0 \leq i \leq n$, les composantes connexes de $P^i - P^{i-1}$ soient des espaces algébriques $V_{i,\alpha}$ isomorphes à k^i (on pose $P^{-1} = \emptyset$). Alors :

a) Pour tout espace algébrique X, l'application naturelle de $\underline{K}(X) \otimes \underline{K}(P)$ dans $\underline{K}(X \times P)$ déduite du produit tensoriel de faisceaux sur X et P, est surjective.

b) Les $\gamma_P(V_{i,\alpha})$ forment un système de générateurs du groupe $\underline{K}(P)$.

La démonstration se fait par récurrence sur n, en utilisant le corollaire de la proposition 2.9 et la proposition 2.10. (N.B. Malheureusement, j'ignore si les $\gamma_P(V_{i;\alpha})$ forment une base de $\underline{K}(P)$ et si l'homomorphisme envisagé dans a) est bijectif. Nous n'aurons pas besoin de le savoir pour la suite).

Théorème 2.14. Soient x_i $(1 \leq i \leq q)$ et E_j $(1 \leq j \leq r)$ des lettres, n_j $(1 \leq j \leq r)$ des entiers > 0 ; considérons les symboles $\lambda^k(x_i)$ avec $k \geq 1$ et $\lambda^k(E_j)$ avec $1 \leq k \leq n_j$ comme des indéterminées et soit R un polynôme à coefficients entiers en ces indéterminées. On suppose que, pour tout anneau gradué A, lorsque l'on substitue dans R aux x_i des éléments ξ_i et aux E_j des éléments η_j de

$\tilde{A}$ soumis aux restrictions $\varepsilon(\xi_i) = 0$ et $\eta_j = [n_j, 1 + \eta_j^{(1)} + \ldots + \eta_j^{(nj)}]$ (donc $\eta_j^{(k)} = 0$ pour $k > n_j$), on ait :

$$R((\lambda^k(\xi_i)),(\lambda^k(\eta_j))) \in \tilde{A}^p$$

Soit alors X une variété quasi-projective irréductible non singulière. Quels que soient les éléments x_i' de $\underline{K}(X)^1$ et les fibrés vectoriels E_j' de dimension n_j sur X ($1\leq i\leq q$, $1\leq j\leq r$), on a

$$R((\lambda^k(x_i')),(\lambda^k(\gamma(E_j'))) \in \underline{K}(X)^p \qquad (*) \quad .$$

Démonstration : En vertu du § 2, les x_i' sont eux-mêmes des différences d'éléments de la forme $\gamma(E)$, E étant un fibré vectoriel. D'autre part, en supposant X localement fermé dans un espace projectif P, il résulte du § 2 et de la proposition 2.5 que, pour tout $F \in \mathcal{F}(X)$, le faisceau F(n) est engendré par ses sections pour n assez grand. Si F est défini par un fibré vectoriel E, cela prouve que E(n) est l'image réciproque du fibré vectoriel canonique sur une variété grasmanienne G par un morphisme de X dans G. Considérant le morphisme correspondant de X dans $P \times G$, on voit que E est l'image réciproque d'un fibré vectoriel sur $P \times G$. On voit donc, appliquant ceci à tous les fibrés vectoriels qui interviennent, et utilisant le corollaire 2 du théorème 2.12, qu'on est ramené au cas où X est un produit de grasmaniennes. Dans ce cas, la conclusion résultera du lemme suivant :

Lemme 2.15. Supposons que X soit un produit de grasmaniennes. Alors on peut trouver un λ-homomorphisme de $\underline{K}(X)$ dans un λ-anneau sans torsion de la forme

---

(*) On prouve facilement que, l'hypothèse faite implique si R est exprimé en termes des $\gamma^k(\xi_i)$, $\gamma^k(E_i - \varepsilon(E_i))$, alors tous les termes de R sont de poids $\geq p$ (où γ^k est de poids k). Alors 2.14 est un cas particulier de X 1.3.2.

$\tilde{A}$ (*où* A *est un anneau gradué*), *compatible avec les filtrations*, *et tel que l'homomorphisme correspondant* $G(K(X)) \longrightarrow G(A)$ *soit injectif*.

Pour le prouver le lemme, nous utiliserons la théorie de Chow des classes de Chern ; si l'on pouvait démontrer le lemme, ou le théorème 2.14 directement, on en déduirait une théorie purement "faisceautique" des classes de Chern (cf. § 5).

Nous considérerons l'homomorphisme $\tilde{C}$ de $\underline{K}(X)$ dans $\tilde{A}(X)$ et nous poserons $A = A(X)$; il faut prouver que l'homomorphisme $\psi = G(\tilde{C})$ de $G(\underline{K}(X))$ dans $G(A(X)) \simeq A(X)$ est injectif. Le fait que $\tilde{C}$ soit compatible avec les filtrations est vrai pour toute variété quasi-projective non singulière et résulte facilement du corollaire à la proposition 2.3. D'autre part comme X est un produit de grasmaniennes C_j, on a sur X des fibrés vectoriels E_j, images réciproques des fibrés canoniques sur les facteurs. Nous utiliserons les faits suivants (connus) :

a) Sur X, l'équivalence linéaire des cycles équivaut à l'équivalence numérique, et A(X) est un groupe de rang fini ;

b) Les $C^i(E_j)$ engendrent l'anneau A(X).

De a) résulte que $\varphi : A(X) \longrightarrow G(\underline{K}(X))$ est injective (donc bijective) en vertu du lemme suivant :

Lemme 2.15. *Soient* X^n *une variété projective non singulière*, Z^{n-p} *un cycle sur* X *tel que* $\varphi(Z) \in G^p(\underline{K}(X))$ *soit nul* ; *alors* Z^{n-p} *est numériquement équivalent à zéro*.

Pour démontrer ce lemme, il suffit d'utiliser la fonction additive $\chi(F) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim H^i(X,F)$ et le fait que cette fonction est égale à

1 pour $F = \underline{O}_{(x)}$ pour tout $x \in X$.

Ainsi, $A(X)$ et $G(\underline{K}(X))$ ont dans le cas envisagé même rang fini en tout degré, et $G(\underline{K}(X))$ est sans torsion, puisqu'il en est ainsi de $A(X)$. De l'assertion b) ci-dessus résulte, de manière "formelle", que l'application $\tilde{C}$ de $\underline{K}(X)$ dans $\widetilde{A(X)}$ est surjective, modulo des groupes finis. Il en résulte facilement, puisque $G(\underline{K}(X))$ et $A(X)$ ont même rang fini en tout degré, que l'homomorphisme $G(\tilde{C})$ de $G(\underline{K}(X))$ dans $G(\widetilde{A(X)})$ est bijectif modulo des groupes finis en tout degré (on utilisera une récurrence sur le degré). Comme $G(\underline{K}(X))$ est sans torsion, cet homomorphisme $G(\tilde{C})$ est donc injectif.

cqfd.

N.B. L'homomorphisme $\tilde{C}$ n'est pas surjectif en général, même si X est un espace projectif de dimension 2.

§ 5. Définition faisceautique des classes de Chern. Application à l'étude des morphismes d'injection.

Théorème 2.16. *Soit X une variété quasi-projective non singulière. Alors, pour tout $x \in K(X)$, et pour tout entier $i \geq 0$, l'élément $\gamma^i(x - \varepsilon(x))$ est de filtration $\geq i$. Soit $c^i(x) \in G^i(\underline{K}(X))$ la classe de cet élément modulo $\underline{K}(X)^{i+1}$; si l'on pose :*

$$\tilde{c}(x) = [\varepsilon(x), 1 + \sum_{i \geq 0} c^i(x)] \in \widetilde{G(\underline{K}(X))} \quad ,$$

alors $\tilde{c}$ satisfait aux conditions analogues à celles du théorème 2.2.

La première assertion résulte du théorème 2.14, ainsi que le fait que $x \longrightarrow \tilde{c}(x)$ soit un homomorphisme de λ-anneaux (la formule (1.25) implique $\gamma_t(x + y) = \gamma_t(x)\ \gamma_t(y)$, ce qui montre déjà que $\tilde{c}$ est un homomorphisme additif). La "fonctorialité" de $\tilde{c}$ se vérifie immédiatement, et

(2.8) résulte de (2.31).

cqfd

Corollaire 1 : On a $c^i(x) = \varphi(C^i(x))$.

Ceci résulte d'un théorème d'unicité pour les classes de Chern, qui se démontre comme chez Hirzebruch par passage aux variétés de drapeaux. On doit seulement montrer que si Y est une variété de drapeaux associée à un fibré vectoriel sur X, alors $G(\underline{K}(X)) \longrightarrow G(\underline{K}(Y))$ est injectif, ce qui se vérifie par la détermination explicité de $\underline{K}(Y)$ avec toutes ses structures à partir de $\underline{K}(X)$ (je ne donnerai pas les détails ici).

Corollaire 2 : Supposons que pour tout élément $Z \in A(X)$, il existe un morphisme f de X dans un produit X' de grasmaniennes tel que Z soit dans l'image de f^* . Alors les homomorphismes canoniques

$$\varphi : A(X) \longrightarrow G(\underline{K}(X)) \ , \qquad \psi : G(\underline{K}(X)) \longrightarrow A(X) \ ,$$

vérifient en dimension i les relations suivantes :

$$\psi\,\varphi = (-1)^{i-1}(i-1)!\ \underline{1} \ , \quad \varphi\,\psi = (-1)^{i-1}(i-1)!\ \underline{1} \quad . \tag{2.35}$$

Comme φ est surjective, il suffit évidemment de prouver la première formule, et pour celle-ci, on peut supposer que X est un produit de grasmaniennes. Comme alors φ est injective, il suffit de prouver la deuxième formule (2.35), qui en vertu du corollaire 1, s'écrit

$$\gamma^i(x - \varepsilon(X)) \equiv (-1)^{i-1}(i-1)!\ x \qquad \operatorname{mod} \underline{K}(X)^{i+1}$$

pour tout $x \in \underline{K}(X)^i$. Comme ψ est injective, il suffit de prouver la relation analogue pour $\widetilde{C}(x) \in A(X)^i$, et c'est alors une conséquence de (1.22 bis).

Remarque : Le corollaire 2 rend plausible la validité de (2.35) dans tous les cas ; il devrait en exister une démonstration directe. On prouve en tout cas facilement la deuxième formule (2.35) modulo le sous-groupe de torsion de $G(\underline{K}(X))$, et en caractéristique 0, cette même formule est une conséquence du théorème de Riemann-Roch. L'intérêt de (2.35) (lorsqu'elle est vraie) tient à ce qu'elle montre que φ est injective modulo des groupes de torsion (peut-être toujours nuls ! (*)), de sorte qu'on "ne perd pas beaucoup" à définir les classes de Chern comme des éléments de $G(\underline{K}(X))$; si l'on fait le produit tensoriel par $\mathbb{Q}$, comme on le fera plus loin pour le théorème de Riemann-Roch, les deux définitions des classes de Chern seraient alors identiques.

Soit toujours X quasi-projective non singulière ; soit de plus Y une sous-variété non singulière de X et soit i l'injection de Y dans X. On a alors, pour $i^!$ et $i_!$ les formules suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i) } i^! \text{ est un homomorphisme de } \lambda\text{-anneaux} \\ \text{(ii) } i_!(x.i^!(y)) = i_!(x).y \quad , \qquad \text{d'où en particulier} \\ \qquad i_!i^!(y) = \xi\, y \qquad \text{avec} \qquad \xi = i_!i^!(1) = \gamma_X(Y) \quad , \\ \text{(iii) } i^!(i_!(x)) = x.\lambda_{-1}(N) \quad , \quad \text{d'où en particulier} \\ \qquad i^!(\xi) = i^!i_!(1) = \lambda_{-1}(N) \, , \\ \text{(iv) } i_!(x)\, i_!(x') = i_!(xx'\, \lambda_{-1}(N) \quad , \end{cases}$$

où, par définition, N est la classe dans $\underline{K}(Y)$ du fibré conormal à Y dans X. Les formules (i) et (ii) sont vraies pour des morphismes quelconques, non nécessairement des injections, et (iii) et (iv) se vérifient sur la définition (2.15) et la formule analogue pour les images inverses (en prenant pour x et x' des classes de fibrés vectoriels, et en se servant du fait que

$$(2.36) \qquad \mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y\, ,\, \underline{O}_Y) = \underline{O}_Y(\Lambda^i N)\, .\ )$$

(*) Non, cf. note de la page 30.

La formule (iv) exprime que $i_!$ est un homomorphisme d'anneaux si l'on introduit sur $\underline{K}(Y)$ une nouvelle structure multiplicative, par la définition $x_N x' = xx'\lambda_{-1}(N)$ (cf. Chapitre I, § 4). Elle se complète par la formule :

(v) $i_!(\lambda^p(N,x)) = \lambda^p(i_!(x))$ pour $p \geq 1$,

qui signifie que $i_!$ définit un λ-homomorphisme de $\underline{K}(Y)_N$ dans $\underline{K}(X)$. Cette formule (v), certainement vraie dans tous les cas, n'est démontrée pour l'instant qu'en caractéristique 0, car elle résulte de la conjonction des théorèmes 1.4 et 2.8.

On a des formules analogues pour i_* et i^* :

(i bis) i^* est un homomorphisme d'anneaux gradués.

(ii bis) $i_*(x.i^*(y)) = i_*(x).y$, d'où en particulier

$i_*(i^*(y)) = \xi' y$, avec $\xi' = i_*(1)$,

(iii bis) $i^*(i_*(x)) = x.(-1)^q N^q$, d'où en particulier

$i^*(\xi') = (-1)^q N^q$,

(iv bis) $i_*(x)\, i_*(x') = i_*(xx'(-1)^q N^q)$,

(v bis) i_* augmente les degrés de q unités.

Dans ces formules, q est la codimension de Y dans X, et l'on pose $N^i = c^i(N)$. Seules les formules (iii bis) et (iv bis) demandent une démonstration ; j'ignore si elles sont bien connues (et même si elles sont vraies !!!) et me borne à noter qu'elles résultent par réduction des formules (ii) et (iv), pourvu qu'on se place dans $G(\underline{K}(Y))$ et $G(\underline{K}(X))$ et non dans $A(Y)$ et $A(X)$. On utilise alors le fait que i_* et i^* proviennent par passage au quotient de $i_!$ et $i^!$, en notant que $i_!$ décale la filtration de q unités.

N.B. Toutes les formules "universelles" liant $i_!$ et $i^!$ (resp. i_* et i^*) sont conséquences formelles des précédentes, comme on peut s'en convaincre sans grande difficulté.

De la formule (v) résulte la formule

$$i_!(\gamma^p(N,x)) = \gamma^p(i_!(x)) \quad .$$

La conjonction du théorème 2.14 et de la proposition 1.5 montre que $\gamma^p(N,x)$ est, pour $p = q + j$, de filtration $\geq j$; si l'on note $G_p(N,x)$ sa classe dans $G^j(\underline{K}(Y))$, le théorème 2.16 montre que l'on a

$$i_*(G_p(N,x)) = c^p(i_!(x)) \quad .$$

Enfin, la proposition 1.5 jointe au théorème 2.14 permet d'exprimer $G_p(N,x)$ comme un polynôme à coefficients entiers en les $c^i(N)$, les $c^i(x)$ et $\varepsilon(x)$; on en déduit le théorème :

<u>Théorème</u> 2.17. <u>Supposons le corps</u> k <u>de caractéristique</u> 0 <u>et soit</u> $i : Y \to X$ <u>un morphisme d'injection de variétés quasi-projectives non singulières</u>. <u>On a alors les formules</u> (i) <u>à</u> (v), <u>et de plus</u>, <u>pour tout entier</u> $j \geq 0$, <u>la formule</u> :

$$c^{q+j}(i_!(x)) = i_*\left(\frac{\tilde{c}(x) * \lambda_{-1}(\tilde{c}(N))}{(-1)^q\, N^q} \right)^{(j)} \quad . \tag{2.37}$$

Le deuxième membre de la formule (2.37) est une façon abrégée de désigner le polynôme en les composantes de $\tilde{c}(x)$ et $\tilde{c}(N)$ décrit dans la proposition 1.5.

<u>Corollaire</u> : <u>Dans les conditions précédentes</u>, <u>on a</u> :

$$\mathrm{ch}(\tilde{c}(i_!(x))) = i_*(\mathrm{ch}(\tilde{c}(x))\, \mathscr{C}(\check{N})^{-1}) \tag{2.38}$$

<u>où</u> ch <u>est l'homomorphisme de Chern défini par la formule</u> (1.26).

Il suffit d'utiliser (2.37) écrit sous la forme :

(2.37 bis) $$\tilde{c}(i_!(x)) = 1 + i_*\left(\frac{\tilde{c}(x) * \lambda_{-1}(c(N)) - 1}{(-1)^q N^q} \right) ,$$

la formule explicite (1.29), la formule (iv bis) et enfin (1.30).

On peut écrire (2.38) sous la forme

(2.38 bis) $$ch_X(F) = i_*(ch_Y(F) \mathcal{C}(T_{X/Y})^{-1}) ,$$

où F est un faisceau algébrique cohérent sur Y (considéré au premier membre comme un faisceau sur X nul en dehors de Y), ch_X et ch_Y sont les homomorphismes de Chern pris respectivement sur X et Y, et $T_{X/Y}$ est le fibré normal à Y dans X.

Remarques : Contrairement à (2.38), la formule (2.37) est une "formule sans dénominateur". Elle n'a été démontrée (même en caractéristique 0) qu'en se plaçant dans $G(\underline{K}(X))$ et non dans A(X), ce qui n'est peut-être pas la même chose. Elle est certainement vraie en toute caractéristique et dans A(X). Notons que l'on vérifie tout de suite que les images des deux membres par i^* sont les mêmes, d'où résulte en appliquant i_* que le produit de leur différence par N^q est nulle. Cela suggère une méthode de démonstration complètement différente, en essayant d'obtenir Y comme image réciproque transversale d'une sous-variété Y' dans une variété X', qui soit telle qu'en dimension $\leq n = \dim X$, la classe de Y' dans A(X') ne soit pas diviseur de 0.... Malheureusement on ne peut espérer que X' soit une grasmanienne ou quelque chose d'approchant.

On notera que, si l'on néglige les éléments de torsion, la formule (2.38) est équivalente à (2.37).

§ 6. Le théorème de Riemann-Roch

Son énoncé est le suivant : soit f un morphisme propre d'une variété quasi-projective non singulière Y dans une variété X de même espèce. Alors, on a :

(2.39) $$f_*(\mathrm{ch}_Y(x)\mathscr{C}(Y)) = \mathrm{ch}_X(f_*(x))\mathscr{C}(X) \quad .$$

(Les deux membres sont dans $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathscr{C}(X) = \mathscr{C}(C(T_X))$.)

Il permet de calculer, aux éléments de torsion près, les classes de Chern de $f_!(x)$ connaissant les classes de Chern de x, celles de T_X et T_Y et l'homomorphisme f_*. Ou encore, il permet de déterminer l'homomorphisme $f_!$ de $\underline{K}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ dans $\underline{K}(X) \otimes \mathbb{Q}$, lorsqu'on identifie au moyen des homomorphismes ch_Y et ch_X ces groupes respectivement à $A(Y) \otimes \mathbb{Q}$ et $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ (si la formule (2.35) est vraie !), à l'aide de f_* et des classes de Chern de T_X et de T_Y .

Je ne sais démontrer la formule (2.39) qu'en caractéristique 0 (*), et comme égalité dans $G(\underline{K}(X)) \otimes \mathbb{Q}$. Pour ceci Y étant localement fermé dans un espace projectif P, on décompose f en le produit d'un morphisme d'injection de Y dans $P \times X$, et d'un morphisme de projection de $P \times X$ sur X, et l'on démontre (2.39) pour chacun de ces deux morphismes..

Pour un morphisme d'injection, on voit immédiatement que les formules (2.38) et (2.39) sont équivalentes (l'hypothèse de caractéristique 0 est intervenue uniquement par l'intermédiaire du théorème 2.8 qui permet d'exprimer les $\lambda^i(\gamma(F))$, pour un faisceau algébrique cohérent F, par des invariants cohomologiques locaux de F).

Pour un morphisme de projection $f : P \times X \longrightarrow X$, on peut, grâce à la proposition 2.13, supposer que x est de la forme $y \otimes z$, avec $y \in \underline{K}(P)$ et

(*) Voir plus bas une démonstration valable en toutes caractéristiques, basée sur un principe différent (p.51).

$z \in \underline{K}(X)$. Alors, la formule de Künneth donne $f_!(x) = \chi(y)z$, où pour un faisceau algébrique cohérent F sur P, l'on pose :

$$\chi(F) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim H^i(P,F) \quad .$$

On est alors aussitôt ramené à prouver la formule

$$\chi(F) = \varkappa_r(ch_P(F)\mathcal{C}(P)) \tag{2.40}$$

où $\varkappa_r$ désigne la composante de degré $r = \dim P$. En vertu de la proposition 2.13, on peut supposer que $F = \underline{O}_Q$, où Q est une sous-variété linéaire de P . Alors $\chi(F) = 1$, puisque c'est le genre arithmétique de Q ; reste à voir que le deuxième membre de la formule (2.40) vaut 1 .

Si en effet V est un hyperplan de P et si l'on pose $\xi = \gamma_P(\underline{O}_V)$ et $L = \mathcal{L}(V)$, on aura :

$$1 - \xi = \gamma_P(E(-L))$$

(où $E(-L)$ est le fibré vectoriel défini par $- L$), d'où :

$$C_P(1 - \xi) = [1, 1 - L] \quad ,$$

et par suite

$$ch_P(1 - \xi) = e^{-L} \quad , \quad \text{d'où } ch_P(\xi) = 1 - e^{-L} \quad ,$$

et donc

$$ch_P(\xi^p) = (1 - e^{-L})^p \quad .$$

Or si p est la dimension de Q dans P , on a $\xi^p = \gamma_P(Q)$; on en déduit

$$ch_P(F)\mathcal{C}(P) = (L/(1- e^{-L}))^{r+1}(1 - e^{-L})^p$$

et il faut vérifier que le coefficient de L^r dans cette série formelle en L vaut 1 , ce qui résulte de la propriété caractéristique de la série formelle $L/(1- e^{-L})$, à savoir que le coefficient de L^q dans $(L/(1- e^{-L}))^{q+1}$ vaut 1 (poser $q = r + 1 - p$) .

Références bibliographiques :

[1] Hirzebruch : Neue topologischen Methoden in der algebraischen Geometrie.

[2] Serre : Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Maths.

[3] Grothendieck : Sur les faisceaux algébriques cohérents, in Séminaire Cartan 1956/57.

Démonstration du théorème de Riemann-Roch

(Grothendieck, 1er Novembre 1957)

* Rappel de notations

[Ce sont celles du "rapport sur Riemann-Roch", cité R.R.R. dans ce qui suit.]

Toutes les variétés considérées sont non singulières et quasi-projectives (i.e. isomorphes à une sous-variété localement fermée d'un espace projectif). Le corps de base est algébriquement clos, de caractéristique quelconque.

Si X est une telle variété, on note K(X) le groupe abélien engendré par les classes de faisceaux cohérents sur X (modulo l'identification d'une extension à une somme) ; la somme alternée des Tor fait de K(X) un anneau. Si $\underline{F}$ est un faisceau (resp. un fibré E à fibre vectorielle, resp. une sous-

Les passages entre astériques * ... * sont des interpolations du copiste.

variété Y de X), on note $\gamma_X(\underline{F})$ (resp. $\gamma_X(E)$, resp. $\gamma_X(Y)$) l'élément de K(X) correspondant à $\underline{F}$ (resp. à $\underline{E}$, resp. à $\underline{O}_Y$). (En fait, on écrit souvent $\underline{F}$, E au lieu de $\gamma_X(\underline{F})$ ...).

On note A(X) l'anneau gradué des classes de cylces de X (pour l'équivalence rationnelle -cf. Chow) ; $A^i(X)$ est formé des cycles de **codimension i.**

Si E est un fibré à fibre vectoriel, on note $C(E) = \Sigma\, C^i(E)$, $C^i(E) \in A^i(X)$, sa classe de Chern (définie comme image réciproque des cycles de Schubert) ; on en déduit par linéarité les $C^i(y)$, pour tout $y \in K(X)$. Si $C(y) = \prod(1 + a_i)$, on pose suivant Hirzebruch :

$$ch(y) = \Sigma\, e^{a_i} \quad , \quad T(y) = \prod \frac{a_i}{1 - e^{-a_i}} \quad .$$

Ce sont des éléments de $A(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Lorsque y est le fibré tangent à X, on écrit T(X) au lieu de T(y).

Si G est un fibré à fibre vectorielle, on note $\lambda^p G$ sa puissance extérieure p-ème, et on pose $\lambda_{-1}(G) = \Sigma(-1)^p \lambda^p(G)$; c'est un élément de K(X).

Si f est une application régulière propre d'une variété Y dans une variété X , on définit des homomorphismes (additifs) :

$$f^* : A(X) \longrightarrow A(Y) \qquad \text{et} \qquad f_* : A(Y) \longrightarrow A(X) \quad .$$

Le premier est homogène de degré 0 et multiplicatif. Le second est homogène de degré dim.X - dim.Y.

On définit également des homomorphismes :

$$f^! : K(X) \longrightarrow K(Y) \qquad \text{et} \qquad f_! : K(Y) \longrightarrow K(X).$$

Si $\underline{F}$ est un faisceau cohérent sur X, $f^!(\underline{F})$ est égal, par définition, à la somme alternée des $\mathrm{Tor}_p^{\underline{O}_X}(\underline{O}_Y, \underline{F})$. Pour les fibrés à fibre vectorielle, c'est simplement l'opération d'image réciproque.

Si G est un faisceau cohérent sur Y, $f_*(\underline{G})$ est cohérent sur X. Si l'on note $R^p f_*$ le p-ème foncteur dérivé du foncteur f ainsi défini, on a, par définition, $f_!(\underline{G}) = \Sigma\ (-1)^p\ R^p f_*(\underline{G})$. *

THEOREME DE RIEMANN-ROCH. Soit $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme (* application régulière *) propre d'une variété quasi-projective non singulière Y dans une autre X, et soit $y \in K(Y)$. On a :

$$(1) \qquad f_*(ch(y)T(Y)) = ch(f_!(y))T(X) \quad \text{dans } A(X) \otimes \mathbb{Q} .$$

Démonstration (* abrégée *).

LEMME 1. Considérons des morphismes propres de variétés $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$. Si le théorème R.R. est vrai pour f et g, il l'est pour $f \circ g$. S'il est vrai pour fg et g, il l'est pour f. Si f_* est injective, et si le théorème R.R. est vrai pour fg et f, il l'est pour g.

Trivial. (* En fait, lorsqu'on suppose R.R. vrai pour fg et g, il faut encore supposer que $g_!$ est surjectif pour pouvoir affirmer que R.R. est vrai pour f. *)

Un morphisme propre étant composé d'une injection et d'une projection $X \times P \longrightarrow X$ (où P est un espace projectif), on est ramené à traiter séparément ces deux cas. Le deuxième, on l'a vu, se ramène à du calcul standard, moyennant la proposition 2.13 ("décomposition cellulaire") de R.R.R. On va donc supposer $Y \subset X$, avec le morphisme d'injection i. La formule (1) devient alors :

$$(2) \qquad ch(i_!(y)) = i_*(ch(y)\ T(E)^{-1}),$$

où $E = T_{X/Y}$ est le fibré normal à Y dans X.

LEMME 2. Supposons qu'il existe sur X un fibré C à fibre vectorielle de rang $p = \operatorname{codim}_X Y$, tel que :

$$\text{(3)} \qquad \gamma_X(Y) = i_!(1) = \lambda_{-1}(G) \quad ; \quad i^!(G) = \check{E} \quad ; \quad (-1)^p c^p(G) = Y .$$

Si alors on a :

$$\text{(4)} \qquad y = i^!(x) \quad , \quad \text{avec } x \in K(X) \quad ,$$

la formule (2) est valable.

Démonstration immédiate, à partir du fait que ch est un homomorphisme d'anneaux, et que l'on a :

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{ch}(\lambda_{-1}(G)) = (-1)^p\, c^p(G)\, T(\check{G})^{-1} \quad .$$

COROLLAIRE. R.R. est vrai si Y est une hypersurface et si y est de la forme $i^!(x)$, avec $x \in K(X)$.

LEMME 3. Supposons que $X = Y \times P$, P étant un espace projectif, et que i soit l'injection $u \longrightarrow (u,v_o)$ $v_o \in P$. Alors i_* est injectif et R.R. est vrai.

C'est du pur calcul standard.

Supposons de nouveau X, Y, y quelconques (toujours avec $Y \subset X$). Soit X' la variété éclatée de X à l'aide de Y, et Y' l'hypersurface image réciproque de Y. On a un diagramme d'applications

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & X \\ Y' \arrow[u, "g"] \arrow[r, "j"] & X' \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

canoniques (j étant l'application canonique). L'image réciproque de E dans Y' admet un sous-fibré de rang 1, dont le dual est noté L. D'ailleurs L^{-1} est aussi la restriction à Y' du fibré L(Y') défini sur X' par le diviseur Y'. On pose $F = E/L^{-1}$.

Des calculs élémentaires donnent le :

LEMME 4. <u>On a les formules</u> (<u>où</u> p = $\operatorname{codim}_X Y$) :

(6) $f^! i_!(y) = j_!(\lambda_{-1}(\check{F})\, y)$.

(7) $\lambda_{-1}(\check{F}) \equiv \gamma^{p-1}(E)\, \lambda^p(\check{E}) \quad \mathrm{mod.}(1-L)$ (*) .

(8) $f_*(1) = 1$, <u>d'où</u> $f_* f^* = 1$.

(9) $f^* i_*(\alpha) \equiv j_*(\alpha\, c^{p-1}(F))$ mod.Ker f_* <u>pour tout</u> $\alpha \in A(Y)$.

[Pour simplifier l'écriture, on a fait opérer K(Y) sur K(Y') et A(Y) sur A(Y') grâce aux homomorphismes $g^!$ et g^* . * Dans la formule (7), il semble que $\gamma^{p-1}(E)$ désigne $\lambda^{p-1}(E-2)$, c'est-à-dire $\Sigma_{i+j=p-1}\binom{-p}{j}\lambda^i(E)$; la congruence a lieu dans K(Y').*]

La formule (6) résulte de l'égalité :

(6 bis) $\mathrm{Tor}_i^{\underline{O}_X(v)}(\underline{O}_Y(v), \underline{O}_{Y'}(v')) = \Lambda^i \check{F}(v')$ $(v' \in Y'$, $v = g(v'))$.

La formule (7) résulte des formules

(10) $g_!(L^{-i}) = 0$ pour $0 < i \leq p-1$, $g_!(1) = 1$,

elles-mêmes conséquences de Künneth et de la cohomologie des espaces projectifs.

La formule (8) est triviale, enfin (9) résulte de $g_*(c^{p-1}(F))=1$ qui se déduit, par exemple, des formules immédiates :

(10 bis) $g_*(\xi^i) = 0$ si $0 \leq i < p-1$, $g_*(\xi^{p-1}) = 1$,
avec $\xi = c^1(L) \in A^1(Y')$.

[En fait, (9) est très vraisemblablement une identité, et pas seulement une congruence.]

(*) Cette formule inutilement compliquée peut se remplacer par exemple par VII 4.1.

De la formule (7) résulte aussitôt $y\,\lambda_{-1}(\check{F}) \in j^{!}(K(X'))$ pourvu que l'on ait :

(11) $$y\,\gamma^{p-1}(E)\,\lambda^{p}(\check{E}) \in i^{!}(K(X)).$$

Supposons cette condition (11) satisfaite. D'après le corollaire au lemme 2, R.R. est vrai pour $(Y',X', y\,\lambda_{-1}(\check{F}))$. D'autre part, pour prouver (2), il suffit, en vertu de la formule (8), de prouver que

(12) $$f^{*}ch(i_{!}(y)) \equiv f^{*}(i_{*}(ch(y)\;T(E)^{-1})) \quad \text{mod.Ker}\ f_{*}\ .$$

Or, cette dernière formule se vérifie aussitôt, utilisant (6), (9), R.R. pour $(Y',X', y\,\lambda_{-1}(F))$ et la formule :

(13) $$ch(\lambda_{-1}(\check{F})) = c^{p-1}(F)\;T(F)^{-1} \quad \text{(cf. formule (5))}.$$

Ainsi, R.R. est prouvé chaque fois que $y\,\gamma^{p-1}(E) = 0$, en particulier (puisque $\gamma^{p-1}(E)$ est de filtration $\geq p-1$ * dans K(Y) filtré par la codimension des supports *) chaque fois que $p-1 > \dim.Y$, i.e. chaque fois que $\dim.Y < \frac{\dim.X - 1}{2}$. Or, on se ramène à ce cas, en conjuguant le lemme 1 et le lemme 3 (prenant pour P un espace projectif de dimension r assez grande, par exemple $r > \dim.X + 1$). C.Q.F.D.

N.B. On s'est servi du fait que $\gamma^{p-1}(E)$ était de filtration $\geq p-1$. On peut prouver ce fait directement, sans passer par les grassmaniennes comme dans R.R.R. 2.16, par l'étude du fibré Y' en espaces projectifs associé à E. Cette méthode donne plus généralement le th. 2.14 de R.R.R.

Extrait d'une lettre de Grothendieck

..."moralement", la nouvelle méthode repose sur la détermination de K(X) et de A(X) lorsque X est, soit un fibré projectif associé à un fibré vectoriel, soit une variété obtenu par éclatement d'une sous-variété non singulière. Dans ce deuxième cas, je n'ai pas fait la détermination complète, il manque un petit quelque chose. Avec les notations du petit papier, il faut prouver la formule (9) (mais comme <u>égalité</u>) :

$$(9) \qquad f^*(i_*(\alpha)) = j_*(\alpha\, c^{p-1}(F)) \quad , \quad \alpha \in A(Y) .$$

On constate que les deux membres ont même image par f_*, et même image par j^*, de sorte que la question est équivalente à :

$$(9 \text{ bis}) \qquad \operatorname{Ker} f_* \cap \operatorname{Ker} j^* = 0 .$$

En tout cas, (9) est vraie en réduisant à $G(K(X'))$ (ce qui détruit un peu de torsion, tout au plus), car elle résulte alors de (6) ; il n'y a donc guère de doute qu'elle ne soit vraie.

... Je te signale d'ailleurs que l'<u>égalité</u> (9) résulte très facilement de (6) sans passer par l'ennuyeuse (6 bis)...

p.c.c.J-P.S.